



G
O
I
B



G CONSELLERIA
O EDUCACIÓ
I FORMACIÓ
B PROFESSIONAL
/ DIRECCIÓ GENERAL
PERSONAL DOCENT

Oposicions 2023
Cos: 0590_ Prof. Ensenyament Secundari
Especialitat: 006_ Matemàtiques
Tribunal núm.: 1

PART B DE LA PRIMERA PROVA: EXERCICI DE CARÀCTER PRÀCTIC

- Heu d'escollir una de les dues opcions
- Heu de fer cada problema en fulls separats
- Cada problema val 2 punts
- Disposeu de 4 hores

Palma , 25 de juny de 2023

OPCIÓ A

Exercici 1.- Sigui n un nombre enter positiu. Provar que $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ és divisible per 5 si i sol si, n no és divisible per 4.

Exercici 2.- Sigui f l'endomorfisme d'un \mathbb{R} -espai vectorial E de dimensió 3 que en la base $B_E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ té per matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculeu el polinomi característic, els valors propis i els vectors propis de f .
- És A diagonalitzable? En cas afirmatiu, trobeu una matriu invertible S tal que $S^{-1} \cdot A \cdot S$ sigui diagonal. Calculeu la matriu S^{-1} .
- Trobeu una matriu B , amb coeficients reals tal que $B^2 = A$.

Exercici 3.- Un punt X , pres en la hipotenusa d'un triangle rectangle, es projecta ortogonalment sobre els catets en els punts que denominarem M i N . Determinar la posició del punt X i la longitud del segment \overline{MN} quan aquesta sigui mínima.

Exercici 4.- Demostrau que: (per $a \geq 0$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2a}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{na}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{(1+a)^{1+a}}{e^a}$$

Exercici 5.- Dins d'una bossa hi ha boles indistingibles al tacte, n d'elles de color negre i r de color blanc, si les extraiem totes una darrera l'altre de manera aleatòria. Contesta raonadament

- Quantes disposicions diferents es poden donar?
- En el cas de $n = 4$ negres i $r = 5$ blanques quina probabilitat hi ha que almenys dues boles negres surtin consecutivament?
- En el cas $n = 4$ negres i $r = 11$ blanques quina probabilitat hi ha que almenys dues boles negres surtin consecutivament?



G
O
I
B



G CONSELLERIA
O EDUCACIÓ
I FORMACIÓ
B PROFESSIONAL
/ DIRECCIÓ GENERAL
PERSONAL DOCENT

Oposicions 2023
Cos: 0590_ Prof. Ensenyament Secundari
Especialitat: 006_ Matemàtiques
Tribunal núm.: 1

PART B DE LA PRIMERA PROVA: EXERCICI DE CARÀCTER PRÀCTIC

- Heu d'escollir una de les dues opcions
- Heu de fer cada problema en fulls separats
- Cada problema val 2 punts
- Disposeu de 4 hores

Palma , 25 de juny de 2023

OPCIÓ B

Exercici 1.- Demostreu que per a tot nombre natural n , el nombre $(n^3 - 1)n^3(n^3 + 1)$ és divisible per 504.

$$\text{Indicació } (504) \equiv (\dot{7}) \cap (\dot{8}) \cap (\dot{9})$$

Exercici 2.- Determina tots els polinomis $P(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ tals que

$$P(x) - P(x - 1) = x^2, \quad P(0) = 0$$

i dedueixi d'això el valor de la suma

$$\sum_{k=1}^n k^2$$

$\mathbb{R}_3[x]$: Polinomis amb coeficients reals de grau menor o igual a tres.

Exercici 3.- A la frontera d'un prat circular d'1 metre de radi, es lliga amb una corda d'1 metre de longitud un animal. Quina superfície d'herba pot menjar?

Exercici 4.- Sigui $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successió de nombres reals amb límit $\alpha \in \mathbb{R}$

a) Demostreu que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - \alpha$$

b) Demostreu que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + n^2 + n}{3^{n+1} \cdot n \cdot (n+1)} = \frac{1}{2}$$

Exercici 5.- Es defineix una variable aleatòria η com suma de 100 variables ξ_i , independents i distribuïdes a l'interval $[0; 1]$, amb funció de densitat $f(x) = 2x$.
Calcula la probabilitat

$$p(66 < \eta \leq 67)$$