Oposición a Profesorado de Ensino Secundario
Especialidade Matemáticas - Opción A
19/06/2022

1. Sexa $G = \mathbb{Q}_0 \times \mathbb{Q}$ con $\mathbb{Q} = \mathbb{Q} - \{0\}$. Defínese en G a operación:

$$(a, b) \circ (c, d) := (ac, bc + d)$$

   a) Demostrar que $(G, \circ)$ é un grupo.
   b) O conxunto $S = \{(1, b) \backslash b \in \mathbb{Q}\}$ é un subgrupo normal de G.
   c) S é isomorfo ao grupo aditivo $\mathbb{Q}$.

Solución

a) $(G, \circ)$ é un grupo se se verifican as seguintes propiedades:
   (1) A operación é interna.
   (2) A operación é asociativa.
   (3) Existe elemento neutro.
   (4) Todo elemento ten simétrico.

   Proba de (1):
   Para $(a, b), (c, d) \in G$ tense que $(a, b) \circ (c, d) \in G$, xa que $ac \in \mathbb{Q}_0$ por ser $a \neq 0 \neq c$ e $ac + d \in \mathbb{Q}$.

   Proba de (2):
   A operación é asociativa se

$$(a, b) \circ [(c, d) \circ (e, f)] = [(a, b) \circ (c, d)] \circ (e, f) \quad \forall (a, b), (c, d), (e, f) \in G$$

   Por definición da operación:

$$(a, b) \circ [(c, d) \circ (e, f)] = (a, b) \circ (ce, de + f) = (ace, bce + de + f)$$

$$[(a, b) \circ (c, d)] \circ (e, f) = (ac, bc + d) \circ (e, f) = (ace, (bc + d)e + f) = (ace, bce + de + f)$$

   Proba de (3):
   Vexamos que $(1, 0) \in \mathbb{Q}_0 \times \mathbb{Q}$ é o elemento neutro de G, isto é, para $(a, b) \in G$ tense que

$$(a, b) \circ (1, 0) = (1, 0) \circ (a, b) = (a, b)$$

   É evidende, xa que:

$$(a, b) \circ (1, 0) = (a1, b + 0) = (a, b)$$

Cortesia de CEDE www.cede.es

$$(1,0) \circ (a,b) = (1a, 0a+b) = (a,b)$$

Proba de (4):
Vexamos que todo elemento de G ten simétrico, isto é:

$$\forall (a,b) \in G \quad \exists (c,d) \in G \backslash (a,b) \circ (c,d) = (1,0) = (c,d) \circ (a,b)$$

Sexa $(a,b) \in G$. Buscase $(c,d) \in G$ tal que:

$$(a,b) \circ (c,d) = (ac, bc+d) = (1,0)$$

$$(c,d) \circ (a,b) = (ca, da+b) = (1,0)$$

Está claro que $c = a^{-1}$ dado que $ac = 1 = ca$.
Por outra parte:

$$bc + d = 0 \Rightarrow ba^{-1} + d = 0 \Rightarrow d = -ba^{-1}$$

$$da + b = 0 \Rightarrow da = -b \Rightarrow daa^{-1} = -ba^{-1} \Rightarrow d = -ba^{-1}$$

En conclusión, todo elemento $(a,b) \in G$ ten simétrico

$$(a^{-1}, -ba^{-1}) \in G.$$

b) S é un subgrupo normal de G se se verifican:
(1) S é un subgrupo de G.
(2) $(x,y) \circ S \circ (x,y)^{-1} \in S \quad \forall (x,y) \in G$
Proba de (1):
S é un subgrupo de $G \Leftrightarrow s_1^{-1} \circ s_2 \in S \quad \forall s_1, s_2 \in S$
Sexan $s_1 = (1,a) \in S$ e $s_2 = (1,b) \in S$, vexamos que $s_1^{-1} \circ s_2 \in S$:

$$(1,a)^{-1} \circ (1,b) = (1,-a) \circ (1,b) = (1, -a+b) \in S$$

Proba de (2):
Sexa $(x,y) \in G$ e $(1,b) \in S$.

$$(x,y) \circ (1,b) \circ (x,y)^{-1} = (x,y) \circ (1,b) \circ (x^{-1}, -yx^{-1}) =$$

$$(x1, y1+b) \circ (x^{-1}, -yx^{-1}) = (x1x^{-1}, y1x^{-1} + bx^{-1} - yx^{-1}) = (1, bx^{-1}) \in S$$

c) Definimos $f : (S, \circ) \longrightarrow (\mathbb{Q}, +)$ tal que $f(1,b) = b$. Probemos que f é un isomorfismo de grupos, isto é, f é bixectiva e un homomorfismo de grupos.
Está claro que f é bixectiva, xa que:
• f é inxectiva: se $f(1,a) = f(1,b) \Rightarrow a = b$.
• f é sobrexectiva: $\forall b \in \mathbb{Q}$ tense que $f(1,b) = b$.
Vexamos que f é un homomorfismo de grupos, isto é:

$$f((1,a) \circ (1,b)) = f(1,a) + f(1,b) \quad \forall (1,a), (1,b) \in S$$

En efecto:

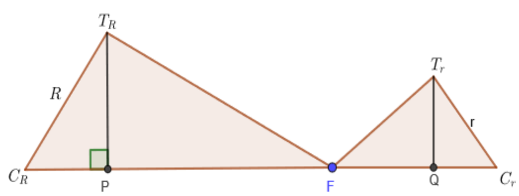
$$f((1,a) \circ (1,b)) = f(1, a+b) = a + b = f(1,a) + f(1,b)$$

Cortesía de CEDE www.cede.es

2. Dadas dúas esferas de radios r e R tales que a distancia entre os seus centros é d, sitúase un punto luminoso na liña que une os centros de ambas esferas.
   En que punto haberá que situalo para que a suma das superficies iluminadas en ambas esferas sexa máxima?
   Solución
   Se denotamos por x a distancia do foco F ao centro da esfera de radio R, temos que a área dos casquetes iluminados ven dada por:

$$Area = 2\pi RH(x) + 2\pi rh(x) \quad (\star)$$

   onde as alturas H e h dos casquetes dependen da distancia do foco ao centro da esfera de radio R.
   Determinamos $H(x)$ e $h(x)$ en función de x. Tense a seguinte situación:



   Onde T_R e T_r son os puntos de corte das tanxentes trazadas dende F ás esferas, $R - H$ é a distancia de C_R a P e $r - h$ a distancia de Q a C_r. C_R e C_r son os centros de ambas esferas.
   Dado que os triángulos $C_R P T_R$ e $C_R F T_R$ son semellantes, tense:

$$\frac{R-H}{R} = \frac{R}{x} \Leftrightarrow H = R - \frac{R^2}{x}$$

   De maneira análoga, $C_r Q T_r$ e $C_r F T_r$ son semellantes e polo tanto:

$$\frac{r-h}{r} = \frac{r}{d-x} \Leftrightarrow h = r - \frac{r^2}{d-x}$$

   Deste xeito, a función que representa a área das esferas iluminadas por un foco situado na liña que une os centros de ambas esferas e a unha distancia x do centro da esfera de radio R é:

$$f(x) = 2\pi R(R - \frac{R^2}{x}) + 2\pi r(r - \frac{r^2}{d-x}) = 2\pi[R^2 + r^2 - (\frac{R^3}{x} + \frac{r^3}{d-x})]$$

   Maximizando esta función obtemos un posible valor de x que maximiza a área iluminada.

$$f'(x) = -2\pi[-\frac{R^3}{x^2} + \frac{r^3}{(d-x)^2}]$$

Cortesia de CEDE www.cede.es

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{R^3}{x^2} = \frac{r^3}{(d-x)^2} \Leftrightarrow \frac{d-x}{x} = \sqrt{(\frac{r}{R})^3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{d}{x} = 1 + \sqrt{(\frac{r}{R})^3} \Leftrightarrow x = \frac{d}{1+\sqrt{(\frac{r}{R})^3}}$$

Vexamos se se trata dun máximo:

$$f''(x) = -2\pi(2\frac{R^3}{x^3} + 2\frac{r^3}{(d-x)^3}) < 0 \quad \text{para} \quad x \in (0,d)$$

En conclusión, x trátase dun máximo e, polo tanto, a distancia á que haberá que situar o foco respecto do centro da esfera de radio R é $\frac{d}{1+\sqrt{(\frac{r}{R})^3}}$.

Cortesía de CEDE www.cede.es

3. Dado un subconxunto acoutado $A \subset \mathbb{R}$, defínese o diámetro do conxunto A como:

$$d(A) := sup\{|x-y| \backslash x, y \in A\}$$

Considérese a seguinte función derivable:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \backslash \exists M > 0 \quad \text{con} \quad |f'(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Demostrar que:

a) Dado $r > 0$, se A é tal que $d(A) \leq \frac{r}{M}$ entón $d(f(A)) \leq r$.

b) Sexa $S \subset \mathbb{R}$ acotaudo e supoñamos que $M < 1$.
Calcular

$$\lim_{n \to \infty} d(f^n(S))$$

onde $f^n(S) = \{(f \circ f \circ \cdots \circ f)(x) \backslash x \in S\}$

Solución

a) Consideremos $A \subset \mathbb{R}$ acoutado tal que $d(A) \leq \frac{r}{M}$.
Sexan $x, y \in A$ con $x < y$. Como f é derivable en $\mathbb{R}$, aplicando o Teorema do valor medio de Lagrange a f no intervalo $[x, y]$ tense que:

$$\exists \varepsilon \in (x, y) \backslash f'(\varepsilon) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Polo tanto:

$$|f(y) - f(x)| = |f'(\varepsilon)||y - x| \leq M \frac{r}{M} = r$$

Logo r é cota superior do conxunto $\{|f(y) - f(x)| \backslash x, y \in A\}$
Dado que o supremo dun conxunto é a menor das cotas superiores do conxunto, conclúese que:

$$d(f(A)) = sup\{|f(y) - f(x)| \backslash x, y \in A\} \leq r.$$

b) Sexa $M < 1$ e $S \subset \mathbb{R}$ acoutado. Por definición temos que:

$$d(f^n(S)) = sup\{|f^n(x) - f^n(y)| \backslash x, y \in S\}$$

Por outra banda:

$$(f^2)'(x) = f'[f(x)]f'(x) \Rightarrow |(f^2)'(x)| = |f'[f(x)]||f'(x)| < M \cdot M = M^2$$

Demostrando por indución, é inmediato probar:

$$|(f^n)'(x)| < M^n.$$

Cortesía de CEDE www.cede.es

Dado que f^n é derivable en $\mathbb{R}$ por ser composición de derivables en $\mathbb{R}$, podemos aplicar o Teorema do valor medio de Lagrange a f^n no intervalo $[x, y]$ con $x < y$:

$$\exists \varepsilon \in (x, y) \backslash (f^n)'(\varepsilon) = \frac{f^n(y) - f^n(x)}{y - x}$$

Ademais S ten supremo ao ser un conxunto acoutado, polo que existe $d(S)$. Así:

$$|f^n(y) - f^n(x)| = |(f^n)'(\varepsilon)||y - x| < M^n|y - x| \leq M^n d(S)$$

De aquí dedúcese que $M^n d(S)$ é unha cota superior do conxunto

$$\{|f^n(x) - f^n(y)| \backslash x, y \in S\}$$

Polo tanto:

$$0 \leq d(f^n(S)) \leq M^n d(S)$$

Tomando limites tense:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} d(f^n(S)) \leq \lim_{n\to\infty} M^n d(S) = 0$$

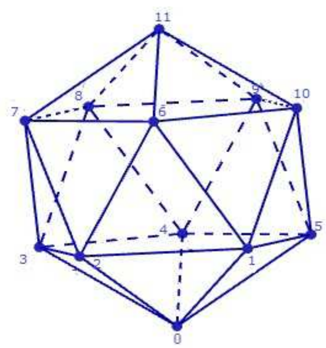
En conclusión:

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(S)) = 0$$

Cortesía de CEDE www.cede.es

4. Unha formiga avanza polas arestas dun icosaedro de modo que, ao chegar a un vértice, volve sobre os seus pasos ou continua por calquera das outras arestas que inciden nel, coa mesma probabilidade.

   Numeramos os vértices do icosaedro do 0 ao 11 e designamos P_k á probabilidade de que partindo do vertice k chegue ao polo norte (11) antes que ao polo sur (0), é claro que $P_0 = 0$ e $P_{11} = 1$. Achar P_k para $k = 1, \ldots, 10$.



Solución
Cada vértice k ten un conxunto de 5 vértices adxacentes A(k) e é claro que

$$P_k = \frac{1}{5} \sum_{i \in A(k)} P_i \quad \forall k = 1, \ldots, 10$$

Debemos escribir e resolver este sistema de ecuacións lineais:

$$\begin{cases} 5P_1 - P_2 - P_5 - P_6 - P_{10} = 0 \\ 5P_2 - P_1 - P_3 - P_6 - P_7 = 0 \\ 5P_3 - P_4 - P_8 - P_7 - P_2 = 0 \\ 5P_4 - P_3 - P_8 - P_9 - P_5 = 0 \\ 5P_5 - P_1 - P_{10} - P_9 - P_4 = 0 \\ 5P_6 - P_1 - P_2 - P_7 - P_{10} - 1 = 0 \\ 5P_7 - P_6 - P_2 - P_3 - P_8 - 1 = 0 \\ 5P_8 - P_7 - P_9 - P_3 - P_4 - 1 = 0 \\ 5P_9 - P_8 - P_{10} - P_4 - P_5 - 1 = 0 \\ 5P_{10} - P_9 - P_5 - P_6 - P_1 - 1 = 0 \end{cases}$$

Podemos escribilo en forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Cortesia de CEDE www.cede.es

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Podemos calcular a matriz inversa de A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{43}{150} & \frac{31}{300} & \frac{4}{75} & \frac{4}{75} & \frac{31}{300} & \frac{17}{150} & \frac{19}{300} & \frac{7}{150} & \frac{19}{300} & \frac{17}{150} \\ \frac{31}{300} & \frac{43}{150} & \frac{31}{300} & \frac{4}{75} & \frac{4}{75} & \frac{17}{150} & \frac{17}{150} & \frac{19}{300} & \frac{7}{150} & \frac{19}{300} \\ \frac{4}{75} & \frac{31}{300} & \frac{43}{150} & \frac{31}{300} & \frac{4}{75} & \frac{19}{300} & \frac{17}{150} & \frac{17}{150} & \frac{19}{300} & \frac{7}{150} \\ \frac{4}{75} & \frac{4}{75} & \frac{31}{300} & \frac{43}{150} & \frac{31}{300} & \frac{7}{150} & \frac{19}{300} & \frac{17}{150} & \frac{17}{150} & \frac{19}{300} \\ \frac{31}{300} & \frac{4}{75} & \frac{4}{75} & \frac{31}{300} & \frac{43}{150} & \frac{19}{300} & \frac{7}{150} & \frac{19}{300} & \frac{17}{150} & \frac{17}{150} \\ \frac{17}{150} & \frac{17}{150} & \frac{19}{300} & \frac{7}{150} & \frac{19}{300} & \frac{43}{150} & \frac{31}{300} & \frac{4}{75} & \frac{4}{75} & \frac{31}{300} \\ \frac{19}{300} & \frac{17}{150} & \frac{17}{150} & \frac{19}{300} & \frac{7}{150} & \frac{31}{300} & \frac{43}{150} & \frac{31}{300} & \frac{4}{75} & \frac{4}{75} \\ \frac{7}{150} & \frac{19}{300} & \frac{17}{150} & \frac{17}{150} & \frac{19}{300} & \frac{4}{75} & \frac{31}{300} & \frac{43}{150} & \frac{31}{300} & \frac{4}{75} \\ \frac{19}{300} & \frac{7}{150} & \frac{19}{300} & \frac{17}{150} & \frac{17}{150} & \frac{4}{75} & \frac{4}{75} & \frac{31}{300} & \frac{43}{150} & \frac{31}{300} \\ \frac{17}{150} & \frac{19}{300} & \frac{7}{150} & \frac{19}{300} & \frac{17}{150} & \frac{31}{300} & \frac{4}{75} & \frac{4}{75} & \frac{31}{300} & \frac{43}{150} \end{pmatrix}$$

Ao facer o produto:

$$A^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Obtemos a solución única:

$$(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5})$$

Observación: É fácil deducir que:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5$$

$$P_6 = P_7 = P_8 = P_9 = P_{10}$$

Entón, podemos simplificar o sistema a un de dúas ecuacións con dúas incógnitas. Chamando

$$P_a = P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5$$

$$P_b = P_6 = P_7 = P_8 = P_9 = P_{10}$$

tense:

$$\begin{cases} 3P_a - 2P_b = 0 \\ -2P_a + 3P_b = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $P_a = \frac{2}{5}$ e $P_b = \frac{3}{5}$

Cortesía de CEDE www.cede.es

Oposición a Profesorado de Ensino Secundario
Especialidade Matemáticas - Opción B
19/06/2022

1. Demostrar que el núcleo de un homomorfismo de anillos es un ideal.

Solución
Sean $(A, +, \cdot)$ y $(B, +, \cdot)$ anillos y $f : A \to B$ un homomorfismo de anillos.
Probemos que $Ker f = \{a \in A / f(a) = 0\}$ es un ideal de A, esto es, que se verifican las siguientes condiciones:

a) $Ker f \subset A$ subconjunto no vacío.
b) $x - y \in Ker f \quad \forall x, y \in Ker f$
c) Si $x \in Ker f$ y $a \in A \Rightarrow x \cdot a \in Ker f$ y $a \cdot x \in Ker f$

Prueba de a) Por definición del conjunto $Ker f$ es evidente que $Ker f \subset A$. Además, $0 \in Ker f$ ya que $f(0) = 0$. Por tanto $Ker f$ es no vacío.

Prueba de b) Sean $x, y \in Ker f$. Veamos que $x - y \in Ker f$, esto es:

$$f(x - y) = 0$$

$$f(x-y) = f(x+(-y)) = f(x)+f(-y) = f(x)-f(y) = 0-0 = 0$$

Prueba de c) Sean $x \in Ker f$ y $a \in A$. Veamos que $x \cdot a \in Ker f$, es decir: $f(x \cdot a) = 0$.

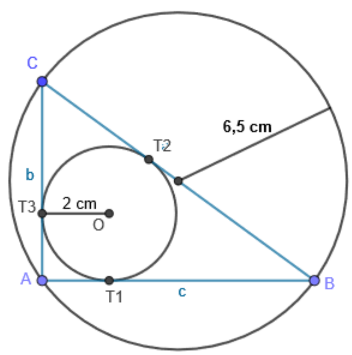
$$f(x \cdot a) = f(x) \cdot f(a) = 0 \cdot f(a) \overset{\text{B anillo}}{=} 0$$

Analogamente se tiene que $f(a \cdot x) = 0$ y, por tanto, $a \cdot x \in Ker f$.

Cortesía de CEDE www.cede.es

2. El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo es $6,5$ cm y el radio de su circunferencia inscrita es 2 cm. Calcular la medida de los lados del triángulo.

   Solución
   Denotemos por A, B y C los vértices del triángulo opuestos a los lados a, b y c respectivamente, siendo Â el ángulo recto.
   Denotemos, además, por T_1, T_2 y T_3 los puntos de tangencia de cada lado del triángulo con su circunferencia inscrita y sea O el centro de la misma.
   Se tiene la siguiente situación:



Dado que A pertenece al arco capaz de 90º relativo al segmento que une B y C se tiene que el segmento BC es un diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo. Por tanto:

$$|BC| = a = 2 \cdot 6,5 = 13\ cm \Rightarrow a = 13\ cm$$

Para determinar los lados b y c consideremos:

$$\begin{cases} b = |AT_3| + |CT_3| \\ c = |AT_1| + |BT_1| \end{cases} \quad (1)$$

Dado que $|OT_1| = |OT_2| = |OT_3| = 2\ cm$ se tiene que AT_1OT_3 es un cuadrado de lado 2 cm:

$$|AT_1| = |AT_3| = 2\ cm \quad (2)$$

Por otra parte, por ser O el punto de intersección de las bisectrices interiores del triángulo, se satisfacen las siguientes igualdades:

$$|BT_2| = |BT_1|$$

Cortesía de CEDE www.cede.es

$$|CT_2| = |CT_3|$$

Puesto que $|BC| = 13$ se tiene que $|BT_2| + |CT_2| = 13$. Así:

$$|BT_1| + |CT_3| = 13\ cm \quad (3)$$

Aplicando (2) y (3) a (1), se obtiene:

$$b + c = 17$$

Teniendo en cuenta el Teorema de Pitágoras, se tiene el siguiente sistema de dos ecuaciones con incógnitas b y c:

$$\begin{cases} b + c = 17 \\ b^2 + c^2 = 13^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 17 - b \\ b^2 + (17 - b)^2 = 169 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 17 - b \\ 2b^2 - 34b + 120 = 0 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación $2b^2 - 34b + 120 = 0$ son $b = 12\ cm$ o $b = 5\ cm$.
Si $b = 12\ cm \Rightarrow c = 5\ cm$
Si $b = 5\ cm \Rightarrow c = 12\ cm$
En conclusión, los lados del triángulo miden $5\ cm, 12\ cm$ y $13\ cm$.

Cortesía de CEDE www.cede.es

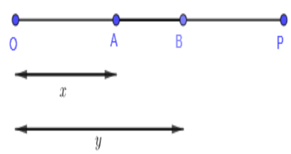
3. Sobre un segmento recto se eligen al azar dos puntos cualesquiera que lo dividan en tres nuevos segmentos. ¿Cuál es la probabilidad de que con ellos se pueda formar un triángulo?

Solución
Sea OP un segmento de longitud l y A y B dos puntos sobre él elegidos al azar.
Denotemos las siguientes variables aleatorias:

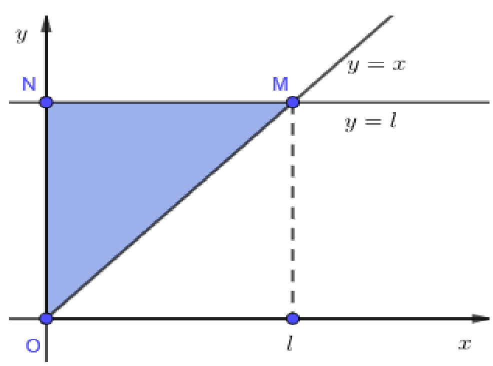
$$x = |OA|$$

$$y = |OB|$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x < y$.
Tenemos la siguiente situación:



Donde la representación geométrica de todos los casos posibles es la siguiente:



Tenemos el segmento OP dividido en tres nuevos segmentos cuyas longitudes son:

$$|OA| = x, \quad |AB| = y - x, \quad |BP| = l - y$$

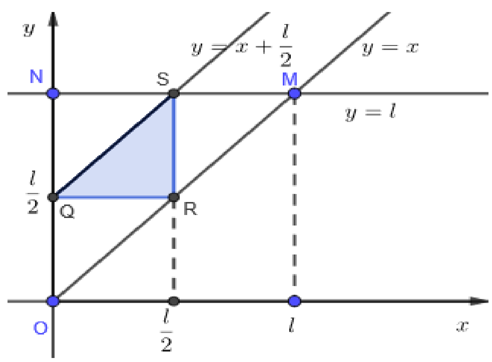
Para que esos tres segmentos sean los lados de un triángulo deben satisfacer la Desigualdad triangular:

$$x < y - x + l - y \Leftrightarrow 2x < l \Leftrightarrow x < \frac{l}{2}$$

$$y - x < x + l - y \Leftrightarrow 2y < 2x + l \Leftrightarrow y < x + \frac{l}{2}$$

$$l - y < x + y - x \Leftrightarrow l < 2y \Leftrightarrow y > \frac{l}{2}$$

La representación de todos los casos favorables es la siguiente región sombreada:



Por tanto, la probabilidad de formar un triángulo con los tres segmentos es:

$$P = \frac{\text{Área}QRS}{\text{Área}OMN} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{l}{2})^2}{\frac{1}{2}l^2} = \frac{1}{4}$$

Cortesía de CEDE www.cede.es

4. Para cada número real t con $|t| < 1$ se considera la función compleja definida por:

$$f(z) = \frac{4 - z^2}{4 - 4tz + z^2}$$

Se pide:

a) Descomponer $f(z)$ en fracciones simples.

b) Obtener la expresión de las derivadas sucesivas de $f(z)$ para $z = 0$.

c) Demostrar que el coeficiente $T_n(t)$ de z^n en el desarrollo en serie de Taylor en $z = 0$ de $f(z)$ es un polinomio de grado n en t y que se cumple la relación de recurrencia:

$$4T_{n+1}(t) - 4tT_n(t) + T_{n-1}(t) = 0 \quad \forall n \geq 2$$

Solución

a) Efectuando la división euclídea se tiene:

$$f(z) = -1 + \frac{-4tz + 8}{z^2 - 4tz + 4}$$

Las soluciones de $z^2 - 4tz + 4 = 0$ son:

$$a = 2t + 2i\sqrt{1 - t^2} \quad \text{y} \quad \overline{a} = 2t - 2i\sqrt{1 - t^2} \qquad (|t| < 1)$$

Expresando en fracciones simples se tiene:

$$\frac{-4tz + 8}{z^2 - 4tz + 4} = \frac{A}{z - a} + \frac{B}{z - \overline{a}} = \frac{A(z - \overline{a}) + B(z - a)}{(z - a)(z - \overline{a})}$$

Hallemos A y B:
Para $z = a$: $-4ta + 8 = A(a - \overline{a})$
Luego:

$$A = \frac{-4ta + 8}{a - \overline{a}} = \frac{-4t(2t + 2i\sqrt{1 - t^2}) + 8}{4i\sqrt{1 - t^2}} = \frac{-ti(2t + 2i\sqrt{1 - t^2}) + 2i}{-\sqrt{1 - t^2}}$$

$$= \frac{-2t^2 i + 2t\sqrt{1 - t^2} + 2i}{-\sqrt{1 - t^2}} = \frac{2i(-t^2 + 1) + 2t\sqrt{1 - t^2}}{-\sqrt{1 - t^2}} =$$

$$= -2i\sqrt{1 - t^2} - 2t = -a$$

Operando de forma análoga se tiene $B = -\overline{a}$.
De este modo, la descomposición de $f(z)$ en fracciones simples es:

$$f(z) = -1 - \frac{a}{z - a} - \frac{\overline{a}}{z - \overline{a}}$$

Cortesía de CEDE www.cede.es

b) Denotemos $f_1(z) = -\frac{a}{z-a}$ y $f_2(z) = -\frac{\overline{a}}{z-\overline{a}}$.
Por el apartado anterior se tiene

$$f(z) = -1 + f_1(z) + f_2(z)$$

Está claro que la n-ésima derivada de $f(z)$ viene dada por:

$$f^{(n)}(z) = f_1^{(n)}(z) + f_2^{(n)}(z)$$

Calculemos $f_1^{(n)}(z)$:

$$f_1(z) = \frac{1}{1-\frac{z}{a}} = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z}{a})^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f_1^{(n)}(0)}{n!}z^n \Rightarrow f_1^{(n)}(0) = \frac{n!}{a^n}$$

De manera análoga se tiene que $f_2^{(n)}(0) = \frac{n!}{\overline{a}^n}$. Por tanto:

$$f^{(n)}(0) = f_1^{(n)}(0)+f_2^{(n)}(0) = n!(\frac{1}{a^n}+\frac{1}{\overline{a}^n}) = \frac{n!(\overline{a}^n + a^n)}{(a\cdot\overline{a})^n} = \frac{n!(\overline{a}^n + a^n)}{4^n}$$

c) En un entorno del origen se tiene

$$f(z) = \frac{4-z^2}{4-4tz+z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(t)z^n$$

O lo que es lo mismo:

$$4-z^2 = (4-4tz+z^2)(T_0(t) + T_1(t)z + T_2(t)z^2 + \cdots)$$

Igualando coeficientes se tiene:

$$\begin{cases} 4 = 4T_0(t) \\ 0 = 4T_1(t) - 4tT_0(t) \\ -1 = 4T_2(t) - 4tT_1(t) + T_0(t) \end{cases}$$

Se deduce:

$$\begin{cases} T_0(t) = 1 \\ T_1(t) = t \\ T_2(t) = t^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Si ahora se identifica en ambos miembros el coeficiente de $z^{(n+1)}$ para $n \geq 2$ se tiene:

$$0 = 4T_{n+1}(t) - 4tT_n(t) + T_{n-1}(t) \quad (\star)$$

Cortesía de CEDE www.cede.es

que se trata de la relación de equivalencia pedida.
Probemos por inducción que $T_n(t)$ es un polinomio de grado n.
• Ya hemos probado que es cierto para $n = 2$.
• Hipótesis de inducción: $T_k(t)$ es un polinomio de grado k, $\forall k \leq n$.
• Veamos que $T_{n+1}(t)$ es un polinomio de grado $n + 1$:
De la relación de recurrencia $(\star)$ tenemos:

$$T_{n+1}(t) = t \cdot T_n(t) - \frac{1}{4}T_{n-1}(t)$$

Por hipótesis de inducción tenemos que $tT_n(t)$ es un polinomio de grado $n + 1$ y $-\frac{1}{4}T_{n-1}(t)$ es un polinomio de grado $n - 1$.
Por tanto, $T_{n+1}(t)$ es un polinomio de grado $n + 1$.

Cortesía de CEDE www.cede.es