OPCIÓN 1

PROBLEMA 1

Sea $P_3(x)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales. Sea $f: P_3(x) \to P_3(x)$ definida por:

$$f[p(x)] = \beta \cdot p(x) + p'(x) \quad \text{, con} \quad \beta \in R$$

a) Probar que f es una aplicación lineal.
b) Hallar su núcleo, su imagen y clasificar f , según los valores de β.
c) Suponiendo β=1, hallar la matriz asociada a f , cuando se considera en $P_3(x)$ la base $B=\{2, x+1, x^2-1, x^3+1\}$, tanto en el espacio inicial como en el final.

PROBLEMA 2

Hallar el volumen del sólido mayor obtenido en un cono recto de base circular de radio 2 cm, al cortarlo con un plano paralelo al eje del cono a una distancia de una unidad de dicho eje. La altura del cono es de 6 cm.

PROBLEMA 3

a) emostrar que si n es par, los números naturales n2 – 1 y 3n + 1 son primos entre si.
b) Demostrar que si n = 30m, entonces la cantidad de números enteros positivos distintos de cero que no son mayores que y que no se dividen por ninguno de los números 6, 10, 15 es igual a 22m.

PROBLEMA 4

Sean b y c dos números comprendidos entre 0 y 1. Hallar la probabilidad de que la ecuación $x^2+2bx+c=0$
tenga raíces reales en los casos:

1) Que los números se elijan al azar e independientemente.
2) Que la función de densidad del par (b,c) sea:

$$f(b,c) = \begin{cases} \frac{3}{2}(b^2+c^2), & si \quad b,c \in (0,1) \\ 0 & en\, otro\, caso \end{cases}$$

PROBLEMA 5

La recta tangente a la parábola P de ecuación $y^2=2x$ en uno de sus puntos $P \in$ P corta al eje de ordenadas en el punto A y la recta normal en P corta a dicho eje en un punto B . Halle la ecuación del lugar geométrico que describe el baricentro G del triángulo $\overset{\Delta}{PAB}$ cuando el punto P recorre la parábola P.

OPCIÓN 2

PROBLEMA 1:

Considera en R^4 los subespacios:

$S=\{(x,y,z,t) \in R^4 / x+2y+z-t=0; z-t=0\}$ y $T=<(1,1,1,1)>$.

a) Obtener una base de $S+T$.
b) Razonar por qué la suma $S+T$ es directa.
c) Determinar si $\vec{v}=(7,1,5,5)$ pertenece a S + T y en caso afirmativo descomponer $\vec{v}$ como suma de un vector $\overrightarrow{v_S}$ en *S* y un vector $\overrightarrow{v_T}$ en *T*.
d) ¿Son *S y T* complementarios uno del otro?

PROBLEMA 2:

Dado un cuadrante AB, de una circunferencia de centro O y radio R, determinar sobre él un punto M de modo que la superficie del cuadrilátero determinado por los radios OA, OB y por las tangentes al arco trazadas por M y por A tenga área mínima.

PROBLEMA 3:

Calcular $\int_0^{+\infty} \frac{x-[x]}{2^{[x]}}dx$, donde $[x]$ es la parte entera de x.

PROBLEMA 4:

Disponemos de dos urnas con N bolas cada una, numeradas de 1 a N en ambas. Se extrae simultáneamente una bola de cada urna y sin devolverlas repetimos esta operación, hasta vaciar las urnas.

a) Hallar la probabilidad de que en ninguna de las extracciones los números de las bolas coincidan.
b) Hallar el límite de dicha probabilidad cuando N tiende a infinito.

PROBLEMA 5:

Dada la circunferencia de centro (1, 0) y radio 2, se trazan por el origen de coordenadas dos rectas variables que forman entre sí un ángulo de 30º. Sean A y B los puntos medios de las cuerdas que cada una de ellas intercepta en la circunferencia. Sea M el punto medio de AB. Hallar el lugar geométrico de los puntos M.