G CONSELLERIA
O EDUCACIÓ
I I FORMACIÓ
B PROFESSIONAL
/ DIRECCIÓ GENERAL
PERSONAL DOCENT

Oposicions 2020
Cos: 590 SECUNDÀRIA
Especialitat: 006 MATEMÀTIQUES
Tribunal núm.: COMISSIÓ DE SELECCIÓ DELS TRIBUNALS DE MALLORCA

PART B DE LA PRIMERA PROVA: PROVA PRÀCTICA

(Tria una opció A o B. Tots els problemes estan puntuats amb 2 punts)

OPCIÓ A

1. Demostra que:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \, dx = \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}$$

2. Sigui $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'aplicació donada per f(n)= la suma dels dígits de n

   a. És f injectiva? És f exhaustiva? Justifica les respostes

   b. Per tot $i \geq 1$ sigui R_i la relació d'equivalència en $\mathbb{N}$ definida per: $xR_iy \leftrightarrow f^i(x) = f^i(y)$ on f^i indica la composició de la funció f amb ella mateixa i vegades.

   Descriu la classe $[1]_{R_1}$. Prova que si $1 \leq i \leq j$ llavors $[n]_{R_i} \subseteq [n]_{R_j}$ per tot n nombre natural. És $[1]_{R_1} = [1]_{R_2}$? Justifica les respostes

3. Si a, b, c són respectivament els termes p_èssim, q_èssim, r_èssim d'una progressió aritmètica i a la vegada d'una progressió geomètrica, demostra que es verifica $a^{b-c} \cdot b^{c-a} \cdot c^{a-b} = 1$

4. Si E és el punt mitjà del costat $\overline{AC}$ d'un triangle qualsevol ABC, i si S és l'àrea d'aquest triangle, prova la següent igualtat:

$$cotg(\widehat{AEB}) = \frac{\overline{BC}^2 - \overline{BA}^2}{4S}$$

5. Agafam dos nombres a l'atzar, $a \in [1,3]$ i $b \in [-1,1]$. Troba la probabilitat que l'equació $x^2 + ax + b = 0$ tingui dues arrels reals.

Carrer del Ter, 16, 1r
07009 Palma
971 17 78 00
educacioiuniversitat.caib.es

Cortesia de CEDE www.cede.es

OPCIÓ B

1. Un punt A es troba a distància d del centre 0 d'un semicercle de radi r. Escriu el radi r d'aquest semicercle en funció de d, per a que, al girar tota la figura al voltant de AO, el volum engendrat pel triangle AOC sigui igual al de l'esfera, sent AC tangent al semicercle i C un punt de la semicircumferència.

2. Calcula el següent límit:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}\,dt$$

3. Sigui $A=(a_{ij}) \in M_{nxn}(K)$, definim traça de la matriu A: $tr(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Demostra que:

   a. $tr(AB)=tr(BA)$ on $A,B \in M_{nxn}(K)$

   b. Si A i B són semblants, aleshores $tr(A)=tr(B)$

   c. La definició de traça d'un endomorfisme f d'E (dimE = n) és $tr(f)=tr(A)$ on A és una matriu associada a f, és correcta?

   d. Si P és una matriu real 2x2 i consideram l'endomorfisme f de $M_{2x2}(\Re)$ definit per $f(A)=AP$, aleshores $tr(f)=2\cdot tr(P)$

4. El número de quilòmetres diaris que recorre un enginyer per inspeccionar empreses és una variable aleatòria amb funció de densitat:

$$f(x)=\begin{cases} ke^{-x} & si\ \ x\in[0,2] \\ 0 & si\ \ x\notin[0,2] \end{cases}$$

   on x representa el número de quilòmetres expressats en centenes.

   a) Calcula k

   b) Obté la mitjana de kilòmetres que recorre en un dia

   c) Si els desplaçaments els efectua durant 150 dies a l'any, quants dies s'haurà de desplaçar més de 150 km?

   d) Quina és la probabilitat de què, tenint un averia a 50 km, tingués assignat aquell dia una ruta de menys de 100km?

5. Per qualsevol nombre enter positiu n sigui $\tau(n)$ el nombre de divisors positius de n. Direm que un nombre positiu és amable si $\frac{\tau(10n)}{\tau(n)}<\frac{5}{2}$. Determina quants nombres positius menors o iguals que 2021 són amables.

Carrer del Ter, 16, 1r
07009 Palma
971 17 78 00
educacioiuniversitat.caib.es

Cortesia de CEDE www.cede.es

PART B DE LA PRIMERA PROVA: PROVA PRÀCTICA

OPCIÓ A

Tots el problemes tenen la mateixa puntuació

PROBLEMA 1:

a) Prova que, per a tot $n \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$, $n(n^2+5)$ és divisible entre 6.
b) Demostra que la fracció $\frac{4n+5}{2n+3}$ és irreductible per a qualsevol $n \in \mathbb{N}$.

PROBLEMA 2:

Dues persones A i B juguen un partit de tennis entre ells. Per tal de guanyar un joc en tennis, s'han de guanyar un mínim de quatre punts i s'ha d'aconseguir que la diferència de punts entre els dos jugadors sigui de dos o més punts. En aquest partit concret, la probabilitat que el jugador A guanyi un punt és constant i igual a p (i, per tant, la probabilitat que el jugador B guanyi un punt és constant i igual a $q = 1 - p$). Calcula:

a) Les probabilitats que A guanyi un joc per 4-0, per 4-1 i per 4-2.

b) La probabilitat que s'arribi a un resultat 3-3 (*deuce*).

c) La probabilitat que A guanyi un joc sabent que el marcador és 3-3-i que s'ha de guanyar per dos punts de diferència.

d) La probabilitat que A guanyi un joc, amb qualsevol resultat.

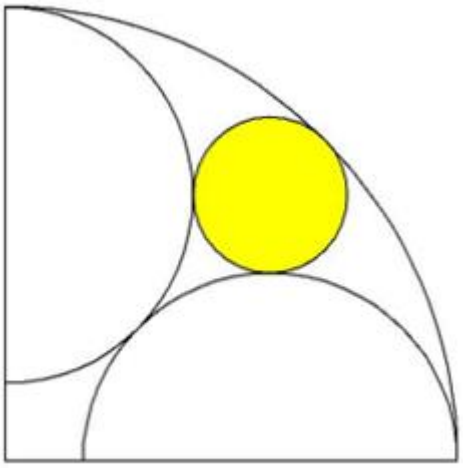
PROBLEMA 3:

La regió *R* queda compresa entre la part positiva dels eixos coordinats i la corba $y = cos\, x$ para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Troba el valor del paràmetre a per tal que la corba $y = a \cdot sin\, x$ divideixi la regió *R* en dues parts d'igual àrea.

Cortesía de CEDE www.cede.es

PROBLEMA 4:

En la figura següent, calcula el radi de la circumferència pintada en funció del radi de la circumferència major.



Les dues semicircumferències mitjanes tenen el mateix radi i tots els arcs són tangents entre sí.

PROBLEMA 5:

En $\mathbb{R}^3$ es considera el pla π d'equació $x+y+z=0$. Es considera la transformació lineal $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que a cada punt P li fa correspondre un punt $f(P)$ de manera que el punt mitjà del segment $\overline{Pf(P)}$ és el punt P', simètric de P respecte el pla π.

a) Interpreta geomètricament la transformació f.

b) Determina una base ortonormal en la qual la matriu associada a f sigui diagonal. Determina també la matriu associada a f en aquesta base.

c) Calcula la matriu de f en la base canònica.

d) Es considera el punt P de coordenades $P(2,2,3)$. Calcula les coordenades del punt $f^{10}(P)$.

e) Es considera la qüestió:

A partir del punt $P(2,2,3)$, calcula les coordenades de $f(P)$.

Ubica aquesta qüestió en el currículum de batxillerat, resol la qüestió en aquest context, de manera detallada i tot indicant els coneixements previs necessaris.

Carrer del Ter, 16, 1r
07009 Palma
971 17 78 00
educacioiuniversitat.caib.es

Cortesia de CEDE www.cede.es

OPCIÓ B

Tots els problemes tenen la mateixa puntuació

PROBLEMA 1:

Sigui E un K - espai vectorial amb una base $B=\{u_1,u_2,u_3\}$. Sigui f l'única aplicació lineal $f: E \to E$ tal que

$$f(u_1)=u_2+u_3$$
$$f(u_2)=u_1+u_2+2u_3$$
$$f(u_3)=2u_1+2u_2+2u_3$$

Si $K=\mathbb{R}$, $E=\mathbb{R}^3$, $B=\{(1,2,1),(1,0,1),(0,0,1)\}$, calcula

a) $f(3,1,2)$.

b) la matriu de f respecte de la base B.

c) la dimensió del nucli de f .

d) la dimensió de la imatge de f

PROBLEMA 2:

El temps de vida d'una bombeta (X) té una distribució de probabilitat amb funció de densitat

$$f(x)=\begin{cases} ce^{-2x} & si \quad x>0 \\ 0 & si \quad x\leq 0 \end{cases}$$

on x està expressada en milers d'hores i c es una constant positiva. Es demana:

a) Determinar el valor de la constant c.

b) Calcular $E(X)$ i $Var(X)$.

c) Determinar la funció de distribució de X.

d) Calcular la probabilitat que una bombeta, que ja ha durat 400 hores, duri 200 hores més.

e) S'encenen n bombetes d'aquest tipus de maneta simultània per tal de determinar la seva durada en funcionament. Es suposa que les bombetes funcionen de manera

Cortesia de CEDE www.cede.es

independent unes d'altres i que el seu temps de vida segueix la funció de probabilitat anterior (és a dir, són independents i idènticament distribuïdes). Determina la funció de densitat de la variable aleatòria Y, que representa el temps d'espera fins que deixa de funcionar la primera bombeta.

PROBLEMA 3:

Siguin A i B els punts mitjans dels costats $\overline{EF}$ i $\overline{DE}$ d'un triangle equilàter DEF inscrit en una circumferència. S'estén el segment $\overline{AB}$ pel seu extrem B fins tallar la circumferència en un punt C. Demostra que B divideix $\overline{AC}$ segons la proporció àuria:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \phi$$

PROBLEMA 4:

En un riu d'amplada *a* metres s'ha construït un canal perpendicular d'amplada *b* metres. Quina ha de ser la longitud màxima que podrà tenir un vaixell que navegui pel riu per poder passar a navegar pel canal?

Nota: considera el vaixell com un segment

PROBLEMA 5:

Sigui x un número real.

a) Prova que $1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$ per a qualsevol n natural, dedueix que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ i determina el radi de convergència de l'anterior identitat.

b) Desenvolupa en sèrie de potències la funció $f(x) = \frac{3}{2+5x^2}$, i determina el seu radi de convergència.

c) Calcula $f^{(n)}(0)$.

d) Planteja un problema contextualitzat, amb diferents apartats, a partir de la identitat del punt a). Resol el problema de manera detallada, tot assenyalant els coneixements previs necessaris.

Cortesia de CEDE www.cede.es

PART B DE LA PRIMERA PROVA: PROVA PRÀCTICA

Indicacions generals: no s'acceptarà cap resultat sense el corresponent desenvolupament i justificació.

OPCIÓ A

1.- Una matriu quadrada se'n diu màgica si, i només si, les sumes dels elements de les seves files, de les seves columnes, i de les seves diagonals són totes iguals.

a) Demostreu que qualsevol matriu M és la suma d'una matriu simètrica M_1 i una matriu antisimètrica M_2 **(2,5 p.)**

b) Demostreu que la suma de matrius màgiques és també una matriu màgica i que el producte d'un escalar per una matriu màgica és també una matriu màgica. **(2 p.)**

c) Calculeu totes les matrius màgiques antisimètriques d'ordre 3. **(1,5 p.)**

d) Construïu totes les matrius màgiques simètriques d'ordre 3 (pot ser recomanable començar per les matrius màgiques de suma nul·la i després generalitzar-lo a suma $s \neq 0$) **(3 p.)**

e) Demostreu que les matrius màgiques d'ordre 3 formen un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$. Quina és la seva dimensió? **(1 p.)**

2.- Determinar l'àrea limitada per l'eix OX, la corba d'equació:

$$y = 2sin^2x - 3\cos x$$

i dues abscisses separades entre sí per una distància igual a un període de la corba. **(10 p.)**

3.- La recta tangent a una circumferència de radi *r,* traçada en un punt A de la circumferència, porta marcat un segment AN amb longitud igual a la de l'arc de la circumferència AM (pres en el mateix sentit). La recta MN talla a la recta AO (sent O el centre de la circumferència) en el punt B. Calculeu: $\lim_{N \to A} OB$ **(10 p.)**

4.- Dos jugadors A i B juguen, alternativament, partides d'un joc. Guanya el joc el primer jugador que aconsegueix guanyar una partida. La probabilitat que guanyi A les seves partides és p_1, i la probabilitat que guanyi B les seves és p_2, amb $p_2 > p_1$. Per compensar l'avantatge que té, B deixa que A jugui la primera partida. Quina relació han de complir p_2 i p_1 per a que el joc sigui just, és a dir, per a que A i B tinguin la mateixa probabilitat de guanyar el joc? **(10 p.)**

Cortesía de CEDE www.cede.es

PART B DE LA PRIMERA PROVA: PROVA PRÀCTICA

Indicacions generals: no s'acceptarà cap resultat sense el corresponent desenvolupament i justificació.

OPCIÓ B

1.- Sigui l'equació:

$$z^3 + (2i - 9)z^2 + (23 - 13i)z + 6(i - 5) = 0$$

a) Troba les seves arrels sabent que té una arrel real **(8 p.)**

b) Suposant que els afixes d'aquestes arrels són tres vèrtex d'un paral·lelogram troba els complexes que poden correspondre amb un quart vèrtex. **(2 p.)**

2.- Calculeu la integral indefinida de la funció donada pel desenvolupament del següent determinant:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 & \ln x & (\ln x)^2 & (\ln x)^3 \\ 1 & \ln x^2 & (\ln x^2)^2 & (\ln x^2)^3 \\ 1 & \ln x^3 & (\ln x^3)^2 & (\ln x^3)^3 \\ 1 & \ln x^4 & (\ln x^4)^2 & (\ln x^4)^3 \end{vmatrix}$$

(10 p.)

3.- Considereu un quadrat de costat 2*a*. Determinar l'àrea de la regió formada pels punts del quadrat que estan més a prop del centre que d'un qualsevol dels costats.

(10 p.)

4.- Sigui X una variable aleatòria amb funció de densitat:

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-x^2} & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases}$$

a) Trobar el valor de k. **(3 p.)**

b) Troba la funció de distribució de la variable X **(3 p.)**

c) Troba $P(-1 \leq X \leq 1)$ **(1 p.)**

d) Troba la mitjana aritmètica de X **(3 p.)**

Cortesía de CEDE www.cede.es