Junta de Andalucía

Consejería de Educación y Deporte

Procedimiento selectivo convocado por Orden de 30 de noviembre de 2020, por la que se efectúa convocatoria de procedimientos selectivos para el ingreso en los Cuerpos de Profesores de Enseñanza Secundaria, Profesores Técnicos de Formación Profesional, Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, Profesores de Artes Plásticas y Diseño, Maestros de Taller de Artes Plásticas y Diseño y acceso al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria y al Cuerpo de Profesores de Artes Plásticas y Diseño

CUERPO 590 – PROFESORES DE ENSENANZA SECUNDARIA

ESPECIALIDAD (006)

MATEMÁTICAS

PRUEBA PRIMERA

Parte A. Práctica
20 de junio de 2021

> Para obtener la puntuación máxima se deberán resolver correctamente todos los apartados contenidos en tres problemas elegidos de los seis propuestos. Se deberán numerar las páginas antes de realizar la entrega y, en caso de haber resuelto más de tres problemas, se corregirán únicamente los tres primeros.

Problema 1

(a) [***6 puntos***] Se lanzan n monedas una detrás de otra. En cada lanzamiento, la probabilidad de obtener cara es p. Si se han obtenido k caras, $0 \leq k \leq n$, ¿cuál es la probabilidad de que haya aparecido cara en la primera moneda?

(b) [***4 puntos***] Demuestre que todo número complejo z de módulo 1 con $z \neq 1$ puede escribirse de la forma

$$\frac{1+\mu i}{1-\mu i}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Halle μ en función del argumento de z.

Problema 2

(a) [***6 puntos***] Estudie los extremos de la función

$$f(x) = |2x-1|e^{-|x-2|} \qquad \text{en } [-3,3]$$

(b) [***4 puntos***] Calcule el límite de la sucesión definida por

$$\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)$$

Problema 3

(a) [***5 puntos***] Pruebe que

$$\sum_{k=0}^{n}\cos k\theta = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})\theta}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

(b) [***5 puntos***] Dado el triángulo ABC, pruebe que es rectángulo si y solo si se cumple $\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C = 2$.

Problema 4

(a) [***2.5 puntos***] Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Pruebe que si un vector $\mathbf{v}$ depende linealmente de $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ pero no depende linealmente de $\{\mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ entonces $\mathbf{u_1}$ depende linealmente de $\{\mathbf{v}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$.

(b) En el espacio vectorial $\mathbb{Q}^4$ se consideran los subespacios

$$S_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad S_2 : \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad S_3 : \{y + z = 0$$

(b.1) [***3.5 puntos***] Halle $\dim(S_1 + S_2)$ y $\dim(S_1 \cap S_2)$.

(b.2) [***2.5 puntos***] Halle una base de $S_1 \cap S_3$.

(b.3) [***1.5 puntos***] ¿Qué dimensión tiene $S_1 + S_3$?

Problema 5

(a) [***5 puntos***] Halle el volumen del toro de revolución que se obtiene al girar la circunferencia $(x - a)^2 + y^2 = b^2$ $(0 < b < a)$ alrededor del eje de ordenadas.

(b) Siendo

$$a_n = \frac{n^k}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

el término general de una serie, se pide:

(b.1) [***3 puntos***] Sustituya el exponente k por el mayor número entero compatible con la condición de ser convergente la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b.2) [***2 puntos***] Halle la suma de la serie para dicho k.

Problema 6

(a) [***6 puntos***] Sea $\Upsilon = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 20210\}$.
Pruebe que si $\left(\alpha + \sqrt{85}\beta\right) \in \Upsilon$ y $\left(\sqrt{85}\alpha - \beta\right) \in \Upsilon$, entonces $\alpha^2 + \beta^2 \in \Upsilon$

(b) Se colocan al azar cuatro bolas en tres urnas.

(b.1) [***3 puntos***] Describa la distribución de la variable aleatoria

$$X = \textit{número máximo de bolas que hay en alguna urna.}$$

(b.2) [***1 punto***] Halle $\mathrm{E}(X)$.