OPOSICIONES AL CUERPO DE PROFESORES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

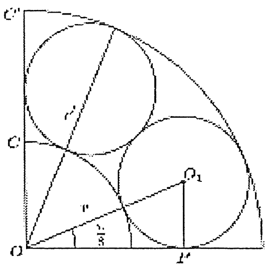
Madrid 2018

1. Sean C y C' dos circunferencias concéntricas de radios r y r' respectivamente, con $r < r'$. En la corona limitada por C y C' existen ocho circunferencias C_i, con tangentes a C y C' y de tal modo que C_i es tangente a C_{i+1} para $i = 1, 2, ..., 7$, y C_8 es también tangente a C_1. Determinar valor de $\frac{r'}{r}$.

RESOLUCIÓN:

En un cuadrante habrá exactamente dos de las ocho circunferencias pequeñas, situemos los ejes de forma que el eje de abscisas sea tangente a la primera circunferencia con centro en O_1, como se observa en la figura.

*oposiciones*2018



El ángulo central del triángulo OO_1P es una dieciseisava parte de la circunferencia total, es decir

$$\frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8} = 22^o30',$$

el seno de este ángulo es, con ayuda del seno del arco mitad, exactamente

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \simeq 0,765\ 3668.$$

La hipotenusa y un cateto de ese triángulo valen:

$$OO_1 = r + \frac{r'-r}{2} = \frac{r+r'}{2} \qquad \text{y} \qquad O_1P = \frac{r'-r}{2},$$

de donde resulta que

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{O_1P}{OO_1} = \frac{\frac{r'-r}{2}}{\frac{r+r'}{2}} = \frac{r'-r}{r+r'}.$$

Como nos piden el cociente $\frac{r'}{r}$, dividimos numerador y denominador entre r y resulta

$$\frac{\frac{r'}{r}-1}{1+\frac{r'}{r}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2r'}{r}-2 = \sqrt{2-\sqrt{2}}\left(1+\frac{r'}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{2r'}{r}-2 = \sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{r'}{r}$$

CEDE - C/ Cartagena, 129 - 28002 Madrid
Tel.: 91 564 42 94

de donde

$$\left(2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\frac{r'}{r}=2+\sqrt{2-\sqrt{2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{r'}{r}=\frac{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2-\sqrt{2}}}\simeq\frac{2,765\ 3668}{1,234\ 6331}\simeq 2,239\ 8288.$$

2. Sean a y b dos números reales positivos.
a) Demostrar que si $a<b<e$ entones $a^b<b^a$.
b) Demostrar que si $e<a<b$ entonces $a^b>b^a$.

RESOLUCIÓN:

a) Como la función logaritmo neperiano, definida en el intervalo $(0,+\infty)$, es estrictamente creciente en su dominio, utilizando las propiedades de los logaritmos se tienen las siguientes equivalencias:

$$a^b<b^a \quad\Leftrightarrow\quad \ln a^b<\ln b^a \quad\Leftrightarrow\quad b\ln a<a\ln b \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\ln a}{a}<\frac{\ln b}{b}.$$

Estudiemos la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, definida en el intervalo $(0,+\infty)$, donde es continua y derivable. Se tiene que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \qquad\Rightarrow\qquad x=e,\\ f''(x) &= \frac{-1-2(1-\ln x)}{x^3} \quad\Rightarrow\quad f''(e)=\frac{-1}{e^3}<0, \end{aligned}$$

por lo que la función es estrictamente creciente en el intervalo $(0,e)$ y estrictamente decreciente en el $(e,+\infty)$ y tiene un máximo relativo en el punto $(e,1/e)$.

En consecuencia,

$$a<b<e \quad\Rightarrow\quad f(x) \text{ es creciente} \quad\Rightarrow\quad \frac{\ln}{a}<\frac{\ln b}{b}$$

y por la equivalencia vista el comienzo, es $a^b<b^a$.

b) Como $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(e,+\infty)$, se tiene que

$$e<a<b \quad\Rightarrow\quad \frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}$$

y utilizando la expresión del comienzo del ejercicio con las desigualdades cambiadas, es $a^b>b^a$.

3. Calcule el límite en el infinito de la sucesión A_n, siendo A_n el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ x & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ x^2 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0\\ x^3 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x^{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{n}\\ x^{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

CEDE - C/ Cartagena, 129 - 28002 Madrid
Tel.: 91 564 42 94

Resolución:

Debemos desarrollar por la última fila o columna para que los determinantes que resulten sigan teniendo la misma estructura o sean triviales. Desarrollando por la última fila queda

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{n+1}x^{n-1}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{n} \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \cdots & 0 \\ x^2 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \cdots & 0 \\ x^3 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^{n-2} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \\
&= (-1)^{n+1}x^{n-1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n!} + A_{n-1} = (-1)^{2n}x^{n-1}\frac{1}{n!} + A_{n-1} = \frac{x^{n-1}}{n!} + A_{n-1},
\end{aligned}
$$

donde el primer determinante es triangular inferior y su valor el producto de los elementos de la diagonal principal. El segundo determinante es del mismo tipo que el inicial, exactamente es A_{n-1}. Esta fórmula válida si $n \geq 2$.

Escribiendo los valores que resultan para los diferentes valores de n y sustituyendo queda

$$
\left\{\begin{array}{l} A_1 = 1 \\ A_2 = \dfrac{x}{2!} + A_1 \\ A_3 = \dfrac{x^2}{3!} + A_2 \\ \quad\vdots \\ A_n = \dfrac{x^{n-1}}{n!} + A_{n-1} \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} A_1 = 1 \\ A_2 = 1 + \dfrac{x}{2!} \\ A_3 = 1 + \dfrac{x}{2!} + \dfrac{x^2}{3!} \\ \quad\vdots \\ A_n = 1 + \dfrac{x}{2!} + \dfrac{x^2}{3!} + \cdots + \dfrac{x^{n-1}}{n!}. \end{array}\right.
$$

Si fuese $x = 0$, la sucesión sería $A_n = 1$, $\forall n = 1, 2, \ldots$ por lo que el límite pedido sería $\lim_n A_n = 1$. Si es $x \neq 0$ el límite de la serie puede escribirse del modo:

$$
\begin{aligned}
\lim_n A_n &= \lim_n \left(1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{n!}\right) = \lim_n \frac{1}{x}\left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \\
&= \lim_n \frac{1}{x}\left(-1 + \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \\
&= \lim_n \frac{-1}{x} + \lim_n \frac{1}{x}\left(\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \frac{-1}{x} + \frac{e^x}{x} = \frac{e^x - 1}{x},
\end{aligned}
$$

donde hemos utilizado el desarrollo en serie de la función e^x. La solución, en consecuencia, es

$$
\lim_n A_n = \left\{\begin{array}{ll} 1, & \text{si } x = 0, \\ \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{si } x \neq 0. \end{array}\right.
$$

4. Un juego de dados tiene las siguientes reglas:
- Se tiran dos dados equilibrados, numerados del 1 al 6, hasta que sumen 4 o 7.
- Si suman 4 gana el tirador, mientras que pierde si la suma es 7.
Determine la probabilidad de ganar en dicho juego.

RESOLUCIÓN:

Al tirar dos dados se pueden considerar 36 casos posibles. La suma 4 aparece en tres casos, 1+3, 2+2 y 3+1. La suma 7 aparece en seis casos, 1+6, 2+5, 3+4, 4+3, 5+2 y 6+1. Por tanto tenemos las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} p(\textit{sacar 4}) &= \frac{3}{36} = \frac{1}{12}, \qquad p(\textit{sacar 7}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \\ p(\textit{ni 4, ni 7}) &= 1 - p(\textit{no 4}) - p(\textit{no7}) = 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Se entiende que hay un solo jugador que puede ganar o perder según la suerte que tenga. Gana cuando saque 4, pierde en cuanto salga un 7, y cuando no salga ni 4 ni 7, continuará lanzando.

Sea N el suceso "*no sale ni 4 ni 7*". Cada tirada de los dados es independiente del resultado del lanzamiento anterior, por lo que no es preciso considerar probabilidad condicionada. Sea A_n el suceso "*el jugador gana en el lanzamiento n*".

Las probabilidades de que A gane en los sucesivos lanzamientos son:

$$\begin{aligned} p(A_1) &= \frac{1}{12} \\ p(A_2) &= p(N)p(\textit{sacar 4}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{12} \\ p(A_3) &= [p(N)]^2 p(\textit{sacar 4}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} \\ p(A_4) &= [p(N)]^3 p(\textit{sacar 4}) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{12} \\ &\vdots \\ p(A_n) &= [p(N)]^{n-1} p(\textit{sacar 4}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{12} \end{aligned}$$

así la probabilidad de que gane el juego es

$$\begin{aligned} p(\textit{A gane}) &= p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) + \cdots + p(A_n) + \cdots = \\ &= \frac{1}{12} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \frac{1}{12} + \cdots = \\ &= \frac{1}{12}\left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{3}{4}\right)^n + \cdots\right] = \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{12} \cdot \frac{4}{4-3} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

La probabilidad de perder en ese juego solitario es por tanto de 2/3.