OPOSICIONES AL CUERPO DE PROFESORES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

Castilla-León 2018

1. Hallar el número de n-plas, $(a_1, a_2, ..., a_n)$, de componentes a_i, números enteros positivos que satisfacen las tres ecuaciones siguientes:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 26, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 72, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 224.$$

RESOLUCIÓN:

La tercera ecuación nos sirve para acotar las soluciones. Como $7^3 = 343 > 224$, el mayor a_i debe ser 6 como mucho, y como $6^3 = 216 < 224$, solo podrá haber un seis. Por tanto, los números $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pueden estar en la n-pla con frecuencias n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 y n_6 respectivamente, con $n_6 \leq 1$. El sistema es

$$\left\{\begin{array}{l} n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6n_6 = 26 \\ n_1 + 4n_2 + 9n_3 + 16n_4 + 25n_5 + 36n_6 = 72 \\ n_1 + 8n_2 + 27n_3 + 64n_4 + 125n_5 + 216n_6 = 224 \end{array}\right.$$

haciendo las operaciones $E_3 - E_2$ y $E_2 - E_1$, queda

$$\left\{\begin{array}{l} n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6n_6 = 26 \\ 2n_2 + 6n_3 + 12n_4 + 20n_5 + 30n_6 = 46 \\ 4n_2 + 18n_3 + 48n_4 + 100n_5 + 180n_6 = 152 \end{array}\right.$$

dividiendo las dos últimas ecuaciones entre 2 y restando a la tercera el doble de la segunda, $E_3 - 2E_2$, resulta

$$\left\{\begin{array}{r} n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6n_6 = 26 \\ n_2 + 3n_3 + 6n_4 + 10n_5 + 15n_6 = 23 \\ 2n_2 + 9n_3 + 24n_4 + 50n_5 + 90n_6 = 76 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{r} n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 + 6n_6 = 26 \\ n_2 + 3n_3 + 6n_4 + 10n_5 + 15n_6 = 23 \\ 3n_3 + 12n_4 + 30n_5 + 60n_6 = 30 \end{array}\right.$$

Como n_6 tiene que ser 0 ó 1, el único valor para la tercera ecuación es $n_6 = 0$. El sistema queda, dividiendo luego entre 3 la tercera ecuación,

$$\left\{\begin{array}{r} n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 = 26 \\ n_2 + 3n_3 + 6n_4 + 10n_5 = 23 \\ 3n_3 + 12n_4 + 30n_5 = 30 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{r} n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 = 26 \\ n_2 + 3n_3 + 6n_4 + 10n_5 = 23 \\ n_3 + 4n_4 + 10n_5 = 10 \end{array}\right.$$

De la última ecuación se deduce que $n_5 = 0$ ó $n_5 = 1$, pero esta segunda posibilidad nos lleva a que $n_3 = n_4 = 0$, pero entonces la segunda ecuación será $n_2 + 10 = 23$, es decir $n_2 = 13$, que no es posible por ser mayor que 6. Luego tiene que ser $n_5 = 0$. Por tanto el sistema que resulta es

$$\left\{\begin{array}{r} n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 = 26 \\ n_2 + 3n_3 + 6n_4 = 23 \\ n_3 + 4n_4 = 10 \end{array}\right.$$

CEDE - C/ Cartagena, 129 - 28002 Madrid
Tel.: 91 564 42 94
© CEDE – www.cede.es

Los posibles valores de n_4 son 0, 1, 2, para que en la tercera ecuación sea $4n_4 \leq 10$, que nos dan los correspondientes valores de n_3 : 10, 6 y 2. Está claro que $n_3 = 10$ no vale, así que son posibles:

$$\begin{array}{lll} n_3 = 6 \text{ y } n_4 = 1, \text{ luego} & n_2 = 23 - 18 - 6 = -1, & \text{no válido, ó} \\ n_3 = 2 \text{ y } n_4 = 2, \text{ luego} & n_2 = 23 - 6 - 12 = 5, & \text{y} \\ & n_1 = 26 - 10 - 6 - 8 = 2, & \text{únicos.} \end{array}$$

Luego las frecuencias de los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 son, respectivamente, 2, 5, 2, 2, 0, 0. Una solución del problema es

$$(1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4)$$

y todas las posibles n-plas serán

$$PR_{11}^{5,2,2,2} = \frac{11!}{5!2!2!2!} = 41\ 580.$$

2. Sea $f : [0,1] \to [0,+\infty]$ una función continua tal que $f(0) = f(1) = 0$ y $\forall x \in (0,1)$ $f(x) > 0$. Demostrar que existe un cuadrado con dos vértices en el intervalo del eje de abscisas y los otros dos en la gráfica de f.

RESOLUCIÓN:

Como $f(x)$ es continua en $[0,1]$, por el teorema de Weierstrass posee, al menos, un máximo absoluto M, sea $m \in (0,1)$ el primer valor con máximo absoluto de $f(x)$ en el intervalo $(0,1)$, es decir $f(m) = M$. Por el teorema de Darboux de los valores intermedios, $\forall k \in (0, M)$ existe un $x_1 \in (0, m)$ tal que $f(x_1) = k$. Lo mismo puede decirse en el intervalo $(m, 1)$, donde también es continua, es decir, existe un $x_2 \in (m, 1)$ tal que $f(x_2) = k$. Esto se traduce en que $\forall k \in (0, M)$ existen x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2) = k$, por lo que la recta $y = k$ corta a la gráfica de la función en, al menos, dos puntos x_1 y x_2, con lo que tendremos un rectángulo, en principio, de vértices $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$, $(x_1, f(x_1))$ y $(x_2, f(x_2))$. Falta probar que existe un valor de k que verifica, además, que sea $x_2 = x_1 + k$, es decir que la base del rectángulo mida precisamente lo que la altura, y sea un cuadrado.

El problema queda reducido a encontrar un $x \in (0,1)$ tal que $f(x) = f(x + f(x))$, para ello vamos a definir la función auxiliar

$$g(x) = f(x) - f(x + f(x)),$$

que será continua donde esté definida y bastará probar que se anula en algún valor de x. Hemos de ser precisos con el fin de que el valor $x + f(x)$ pertenezca al intervalo $[0,1]$ y se pueda calcular f en ese valor, es decir, debe ser $x + f(x) \leq 1$, de donde se obtiene $f(x) \leq 1 - x$. Buscamos los puntos de corte de la gráfica de $f(x)$ con la parte de la recta $y = 1 - x$ que une los puntos $(0,1)$ y $(1,0)$. Es posible que no se corten en $[0,1)$ y si en $x = 1$, o que se corten en algún valor $p < 1$. Sea p el primer valor en que se corten, que puede haber más que uno, es decir $p = \min\{x \in [0,1] : f(x) = 1 - x\}$. Este mínimo existe ya que sabemos que $f(1) = 1 - 1 = 0$. Por tanto, o bien es $p < 1$, o bien es $p = 1$.

En el primer caso, si es $p < 1$, sea x_0 tal que $f(x_0) = \max\{f(x) : x \in [0,p]\}$, como $f(x)$ recorre todos los valores entre 0 y $f(x_0)$, existirá un $x_1 \in (0, x_0)$ tal que $f(x_1) = x_0 - x_1$, entonces

$$\begin{aligned} g(p) &= f(p) - f(p + f(p)) = 1 - p - f(1) = 1 - p > 0 \\ g(x_1) &= f(x_1) - f(x_1 + f(x_1)) = f(x_1) - f(x_1 + x_0 - x_1) = f(x_1) - f(x_0) < 0. \end{aligned}$$

© CEDE – www.cede.es

CEDE - C/ Cartagena, 129 - 28002 Madrid
Tel.: 91 564 42 94

En el segundo caso, si es $p = 1$, la función $f(x)$ y la recta $y = 1 - x$ se cortan solo en $x = 1$. Como $f(x)$ tiene un máximo en $[0, 1]$ por el teorema de Weierstrass, sea $m \in (0, 1)$ tal que $f(m) = M$. Sea $x_2 \in (0, m)$ tal que $f(x_2) = m - x_2$, que existe porque $f(x)$ recorre todos los valores entre 0 y M, entonces

$$\begin{aligned} g(m) &= f(m) - f(m + f(m)) = M - f(m + f(m)) \geq 0 \\ g(x_2) &= f(x_2) - f(x_2 + f(x_2)) < f(x_2) - M < 0. \end{aligned}$$

Luego por aplicación del teorema de Bolzano a la función $g(x)$ en el intervalo $[0, 1]$, existe un $\alpha \in (0, 1)$ tal que $g(\alpha) = 0$, es decir, $f(\alpha + f(\alpha)) = f(\alpha)$.

3. Si $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot x_n}{1 + x_n}}$, hallar $\prod\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

RESOLUCIÓN:

Tenemos que $x_1 = \sqrt{2}$ y comparando con x_2 resulta

$$x_2 = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}+2-2}{1+\sqrt{2}}} = \sqrt{2 - \frac{2}{1+\sqrt{2}}} < \sqrt{2} = x_1,$$

además, si es $x_k < x_{k-1}$, entonces es $1 + x_k < 1 + x_{k-1}$, de donde

$$x_{k+1} = \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{1}{1+x_k}} < \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{1}{1+x_{k-1}}} = x_k.$$

Por tanto la sucesión es decreciente y es acotada porque $\forall k$ es $0 < x_k \leq \sqrt{2}$. Por ser una sucesión decreciente y acotada posee límite, sea L este límite. Haciendo tender x_n hacia el límite, en la expresión que resulta de elevar al cuadrado la dada en el enunciado, queda

$$x_{n+1}^2 = \frac{2x_n}{1+x_n} \Rightarrow L^2 = \frac{2L}{1+L} \Rightarrow L^2 + L - 2 = 0 \Rightarrow L = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1,$$

ya que siendo positivos todos los valores de la sucesión el valor negativo no es válido.

Falta calcular el producto infinito. Como este producto no tiene ningún valor nulo, una condición necesaria para su convergencia es que el término general del producto tienda a 1, lo que en este caso se cumple porque se ha visto que $L = 1$. Pero esta condición no es suficiente. Una condición necesaria y suficiente para que $\prod\limits_{1}^{\infty}(1 + a_k)$ sea convergente es lo que sea la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} \ln(1 + a_k)$.

Sin embargo, si se tiene en cuenta la semejanza entre la relación de recurrencia dada y la fórmula del coseno del arco mitad, ya que

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}, \qquad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \cos\frac{\pi}{8},$$

y en general

$$\text{si} \quad \frac{1}{x_n} = \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}, \quad \text{es} \quad \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2x_n}{1+x_n}}} = \sqrt{\frac{1+x_n}{2x_n}} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}} = \cos\frac{\pi}{2^{n+2}},$$

CEDE - C/ Cartagena, 129 - 28002 Madrid
Tel.: 91 564 42 94

© CEDE – www.cede.es

se puede hallar el valor del producto infinito. En efecto, como es

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdots \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \cdots$$

utilizando la fórmula siguiente

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdots \cos\frac{x}{2^n} \cdots \qquad (*)$$

para el valor $x = \dfrac{\pi}{4}$, queda

$$\cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdots \cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \cdots = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi},$$

por tanto el valor pedido del producto infinito sale de

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \prod_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{\pi}{2}.$$

La demostración de la fórmula (*) consiste en utilizar repetidamente la fórmula del seno del arco doble:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} x}{x} &= \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{x} = \cos\frac{x}{2} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \cos\frac{x}{2} \cdot \frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}}{\frac{x}{2}} = \\ &= \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{4}}{\frac{x}{4}} = \cdots = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \end{aligned}$$

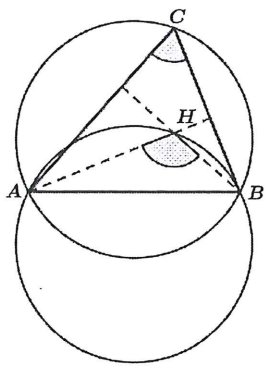
y como es $\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$, la convergencia está garantizada.

4. a) Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia y en ella dos puntos distintos, no diametralmente opuestos, A y B. Describir el lugar geométrico del ortocentro de los triángulos ABC, siendo C un punto de $\mathcal{C}$ distinto de A y B.

b) Se eligen aleatoriamente los números $b, c \in [0, a]$. La probabiliadad de que la distancia en el plano complejo de las raíces del polinomio $z^2 + b \cdot z + c$ no sea mayor que 1, no es menor que $0,25$. Hallar a.

RESOLUCIÓN:

a) Sea H el ortocentro, como se observa en la figura.



© CEDE – www.cede.es

CEDE - C/ Cartagena, 129 - 28002 Madrid
Tel.: 91 564 42 94

Como $\widehat{AHB}+\widehat{ACB}=\pi$, por tener los lados perpendiculares, el ángulo $\widehat{ACB}$ es inscrito y si $\widehat{AHB}$ lo fuese, abarcarían todo lo demás, (porque si los dos inscritos suman π abarcan 2π), luego H está en la circunferencia simétrica respecto del segmento AB.

Cuando C recorre el arco inferior AB, el triángulo ABC es obtusángulo y H recorre el arco grande de la circunferencia simétrica.

b) Las dos soluciones, z_1 y z_2, de la ecuación de segundo grado son

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$$

y si son reales, porque sea $b^2\geq 4c$, la distancia entre ellas será menor o igual que 1 si

$$\operatorname{dist}(z_1,z_2)=\left|\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}\right|=\sqrt{b^2-4c}\leq 1.$$

Si son complejas conjugadas, porque sea $b^2<4c$, la distancia será menor o igual que 1 si

$$\operatorname{dist}(z_1,z_2)=\left|\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}-\frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}\right|=\sqrt{4c-b^2}\leq 1.$$

Elevando al cuadrado, los dos casos quedan englobados en que sea

$$-1\leq 4c-b^2\leq 1 \quad\Leftrightarrow\quad b^2-1\leq 4c\leq b^2+1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{b^2-1}{4}\leq c\leq\frac{b^2+1}{4}.$$

Representemos los valores de b por la variable x y los valores de c por la variable y. Estas variables son uniformes e independientes, por lo que la variable conjunta (x,y) será uniforme en el cuadrado $[0,a]\times[0,a]$.

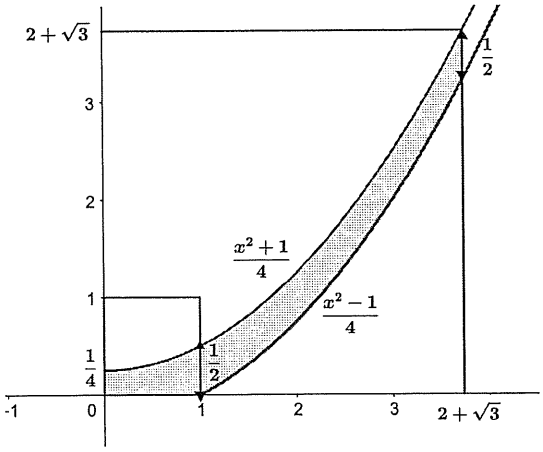
Como es necesario que sea $(x,y)\in[0,a]\times[0,a]$, para que sea

$$\frac{x^2+1}{4}\leq x,\ \text{es decir } x^2-4x+1\leq 0,\ \text{debe ser } x\leq\frac{4+\sqrt{16-4}}{2}=2+\sqrt{3}$$

y además para que sea

$$\frac{x^2-1}{4}\geq 0,\ \text{es decir } x^2-1\geq 0,\ \text{debe ser } x\geq 1.$$

Por tanto, utilizando la regla de Laplace en probabilidades geométricas, los casos posibles son $(x,y)\in[0,a]\times[0,a]$ cuya superficie es a^2, y los casos favorables, dependerán del valor de a, corresponden al área entre las dos curvas, como se observa en la figura.



CEDE - C/ Cartagena, 129 - 28002 Madrid
Tel.: 91 564 42 94
© CEDE – www.cede.es

En el caso $0 < a \leq 1$, la probabilidad está dada por

$$p\left(\text{dis}(z_1, z_2) \leq 1\right) = \frac{1}{a^2}\int_0^a \left(\frac{x^2+1}{4}\right) dx = \frac{1}{4a^2}\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^a = \frac{a}{12} + \frac{1}{4a},$$

que para el caso $a = 1$ vale $1/3$ y a medida que a crece, la probabilidad decrece.

Si es $1 \leq a \leq 2 + \sqrt{3}$, la regla de Laplace da la probabilidad

$$\begin{aligned} p\left(\text{dis}(z_1, z_2) \leq 1\right) &= \frac{1}{a^2}\left(\int_0^1 \left(\frac{x^2+1}{4}\right) dx + \int_1^a \frac{1}{2} dx\right) = \\ &= \frac{1}{4a^2}\left(\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 + [2x]_1^a\right) = \frac{1}{4a^2}\left(\frac{1}{3} + 1 + 2a - 2\right) = \frac{6a-2}{12a^2}, \end{aligned}$$

que para el caso $a = 1$ coincide con el valor anterior $1/3$.

Si es $a > 2 + \sqrt{3}$, la probabilidad es

$$p\left(\text{dis}(z_1, z_2) \leq 1\right) = \frac{1}{a^2}\left(\int_0^1 \left(\frac{x^2+1}{4}\right) dx + \int_1^a \frac{1}{2} dx\right) = \frac{6a-2}{12a^2},$$

la misma expresión que en caso anterior. Es claro que a medida que a crece, la probabilidad se hace más pequeña ya que la zona rayada en la figura representa menos al dividirla por el área del cuadrado más grande cada vez.

En el primer caso, con $0 < a \leq 1$, siempre es mayor que $1/4$ la probabilidad porque

$$0 < a \leq 1 \Leftrightarrow \frac{a}{12} + \frac{1}{4a} \geq \frac{1}{4}.$$

En el segundo caso, para que sea mayor que $1/4$ debe ser:

$$\frac{6a-2}{12a^2} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 6a - 2 \geq 3a^2 \Leftrightarrow 3a^2 - 6a + 2 \leq 0 \Leftrightarrow a \in \left[1 - \tfrac{1}{\sqrt{3}}, 1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

luego

$$0 < a \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

y en el tercer caso por el mismo motivo ya que la expresión de la probabilidad es la misma.

Por tanto, la condicón pedida se cumple cuando $a \in \left(0, 1 + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

□ □ □

© CEDE – www.cede.es

CEDE - C/ Cartagena, 129 - 28002 Madrid
Tel.: 91 564 42 94