1.- Una onda transversal se propaga a través de una cuerda estando dado el desplazamiento de sus partículas por la ecuación $y = 0,06\ sen\ (\pi x + 20\pi t + \pi/2)$, las unidades en m y s. Si la tensión de la cuerda es 600 N, calcular: a) el período de la onda y la rapidez de propagación de la onda, b) la densidad de masa lineal de la cuerda, c) la ecuación de la cuerda en t= 4 s y su gráfico. Si se considera un punto de la cuerda en x= 0 m, d) la ecuación del movimiento transversal y su gráfico, e) la máxima rapidez y aceleración transversal.

a) En la ecuación se identifican los parámetros de la onda:

A= 0,06 m

$$\begin{cases} Número\ de\ onda\ k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \pi\, m^{-1} \;=>\; \lambda = 2\, m \\ Pulsación\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} = 20\pi\, s^{-1} => T = 0{,}1\, s\ \ (f = \dfrac{1}{T} = 10\, s^{-1}) \\ => \;\; Velocida\ de\ fase\ v = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda f = \ 20\, m\, s^{-1} \end{cases}$$

b) Dado que la velocidad de una onda en una cuerda tensa viene dada por la ecuación $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, donde T es la Tensión de la cuerda, en este caso 600 N, y μ la densidad lineal de la cuerda, sustituyendo los valores conocidos resulta que $\mu = \frac{T}{v^2} = \frac{600}{20^2} = 1{,}5\, kg\, m^{-1}$.

c) Si t= 4s, sustituyendo en la ecuación resulta:

$$y\ (x, 4\, s) = \ 0{,}06\, sen\ \left(\pi x + 20\pi x 4 + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}06\, sen\ \left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}06 \cos \pi x = 0{,}06 \cos \frac{2\pi}{2}\, x$$

Es una función cosenoidal, con un período de 2 m, cuya representación tiene en x= 0 y en x= 2 m una valor máximo de 0,06 m, y en x= 1 m un valor de – 0,06 m; en x= 0,5 m y 1,5 m el valor de la función es y = 0 m.

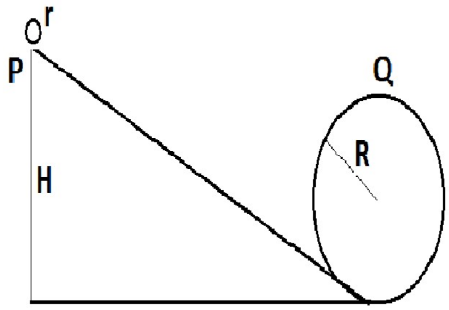
d) Si x= 0 m resulta la ecuación del Movimiento Armónico Simple (MAS) que realiza el elemento de cuerda en x= 0m:

$$y\ (x = 0\, m, t) = \ 0{,}06\ \ sen\ \left(20\pi\, t + \frac{\pi}{2}\right) = \ 0{,}06 \cos 20\pi\, t$$

Es un MAS de amplitud 0,06 m y pulsación ω= 20 π s^{-1}, y la función será cosenoidal con un período $T = \frac{2\pi}{\omega} = 0{,}1\, s$, que en t= 0 s y en t= 0,1 s tiene una elongación de 0,06 m, en t= 0,05 s la elongación es – 0,06 m, y en t= 0,025 s y en t= 0,075 s la elongación será y= 0 m.

e) Dada la ecuación del MAS, la velocidad y aceleración de un elemento de cuerda será:

$$\begin{cases} v = \dfrac{dy}{dt} = -0{,}06\, x\, 20\pi\, sen\ 20\pi\, t = \ -1{,}2\, \pi\, sen\ 20\pi\, t \;=>\; v_{max} = 1{,}2\pi = 3{,}8\, m\, s^{-1} \\ a = \dfrac{dv}{dt} = \ -1{,}2\, \pi\, x\, 20\pi \cos 20\pi\, t = \ -24\, \pi^2 \cos 20\pi\, t \;=>\; a_{max} = \ 24\, \pi^2 = 237\ \ m\, s^{-2} \end{cases}$$



2.- Un cilindro homogéneo de radio r y masa m rueda sin deslizar siguiendo un plano inclinado al final del cual hay una pista circular de radio R en el mismo plano que el plano inclinado. El cilindro parte del reposo en un punto P a una altura H del suelo horizontal. Calcular: a) energía cinética del cilindro cuando alcanza el punto Q más alto de la pista circular, b) su aceleración centrípeta en Q admitiendo que no se sale de la vía, c) el mínimo valor de H para que el cilindro llegue a Q sin salirse de la vía (en los puntos anteriores se supone que H es mayor que ese valor mínimo), d) la expresión de la fuerza normal ejercida por la vía sobre el cilindro en Q.

a) Si el cilindro llega al punto Q, ya se verá más adelante la condición que es necesaria para que llegue, obviamente se conservará la energía mecánica:

$M\,g\,H = Mg\,2R + E_c \;\; => \;\; \boldsymbol{E_c = M\,g\,(H - 2R)}$ (1)

Por Energía cinética debe entenderse la total, o sea, la suma de la energías cinética de traslación y cinética de translación,

b) La *aceleración centrípeta* en Q vendrá dada por la conocida ecuación $\frac{v^2}{R}$. Calculemos el valor de v en Q retomando la expresión de la energía cinética total en las condiciones del problema; recordemos que el *Momento de Inercia* de un cilindro rodando sin deslizar es $I = \frac{1}{2}\,M\,R^2$, y por tanto:

$E_c = \frac{1}{2}\,M\,v^2 + \frac{1}{2}\,I\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,M\,v^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\,M\,R^2\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}\,M\,v^2$. Considerando la ecuación (1):

$M\,g\,H = Mg\,2R + E_c \;\; => Mg\,H = Mg\,2R + \frac{3}{4}\,M\,v^2 \;\; => \;\; v^2 = \frac{4}{3}\,g\,(H - 2R)$ (2)

Y por tanto la expresión de la aceleración centrípeta será: $\boldsymbol{a_{cpta} = \frac{v^2}{R} = \frac{4}{3}\,g\,\left(\frac{H}{R} - 2\right)}$ (3)

c) Para que el cilindro llegue al punto Q , la *condición crítica* viene dada porque la única fuerza normal que actúe es el peso, y por tanto se cumpliría $M\,g = M\,\frac{v^2}{R}$, esto es la velocidad mínima que debe tener en el punto Q es $v^2 = gR$ (4) ,y por tanto considerando las ecuaciones (2) y (4) : $\begin{cases} \frac{4}{3}\,g\,(H - 2R) = gR \\ \quad => \quad \boldsymbol{H = \frac{11}{4}\,R} \end{cases}$

d) Salvo en la situación crítica, en el punto Q actuarán el peso del cilindro y la fuerza normal de la pista que actúa sobre el cilindro, y por tanto la ecuación dinámica correspondiente, utilizando la ecuación (3), es :

$$N + Mg = M\,\frac{v^2}{R} \;\; => \;\; \boldsymbol{N} = M\left(\frac{v^2}{R} - g\right) = M\left(\frac{4}{3}\,g\left(\frac{H}{R} - 2\right) - g\right) = Mg\left(\frac{4H}{3R} - \frac{8}{3} - 1\right) =>$$

$$\boldsymbol{N = \frac{Mg}{3}\left(4\frac{H}{R} - 11\right)}$$