OPOSICIONES AL CUERPO DE PROFESORES DE ENSEÑANZA SECUNDARIA EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS

Andalucía 2016

1. Resolver las siguientes cuestiones de divisibilidad:

a) En una batalla en la que participan entre 10 000 y 11 000 soldados resultaron muertos $\frac{23}{165}$ y heridos $\frac{35}{143}$ del total. Hallar cuántos soldados resultaron ilesos.

b) Hallar el número $N = 2^a 5^b$ sabiendo que la suma de todos sus divisores es 961.

RESOLUCIÓN

a) Si en la batalla participaron P soldados, resultaron muertos y heridos, respectivamente

$$\frac{23P}{165} \quad \text{y} \quad \frac{35P}{143},$$

por lo que P debe ser múltiplo de 165 y de 143, es decir de su mínimo común múltiplo.

Como

$$\text{m.c.m. } (165, 143) = 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = 2145,$$

y el único múltiplo de 2145 que está entre 10000 y 11000 es $5 \cdot 2145 = 10725$, se tiene que los participantes en la batalla fueron 10725, y los muertos y heridos respectivamente

$$\frac{23}{165}10725 = 1495 \quad \text{y} \quad \frac{35}{143}10725 = 2625,$$

por lo que resultaron ilesos

$$10725 - 1495 - 2625 = 6605.$$

b) Si el número es $N = 2^a 5^b$ con $a, b \geq 1$, la suma de sus divisores es

$$(2^a + 2^{a-1} + ... + 2 + 1)(5^b + 5^{b-1} + .. + 5 + 1) = 961,$$

es decir

$$\frac{2^{a+1} - 1}{2 - 1} \frac{5^{b+1} - 1}{5 - 1} = 961,$$

de donde es

$$(2^{a+1} - 1)(5^{b+1} - 1) = 961 \cdot 4 = 31^2 \cdot 2^2.$$

Puesto que 2^{a+1} es un número par, el número $2^{a+1} - 1$ es un impar. Además al ser 5^{b+1} un impar, resulta que $5^{b+1} - 1$ es par. Existen por tanto dos posibilidades:

Primer caso:

$$\begin{cases} 2^{a+1} - 1 = 31^2 & \Rightarrow \quad 2^{a+1} = 962, \\ 5^{b+1} - 1 = 2^2 & \Rightarrow \quad 5^{b+1} = 5, \end{cases}$$

que no es válida porque 962 no puede ponerse como potencia de 2, pues $2^9 = 512$ y $2^{10} = 1024$, y además la segunda condición nos lleva a $b = 0$.

Segundo caso:

$$\begin{cases} 2^{a+1} - 1 = 31 & \Rightarrow \quad 2^{a+1} = 32 = 2^5 \quad \Rightarrow \quad a = 4, \\ 5^{b+1} - 1 = 31 \cdot 2^2 & \Rightarrow \quad 5^{b+1} = 125 = 5^3 \quad \Rightarrow \quad b = 2. \end{cases}$$

Por tanto el número buscado es

$$N = 2^4 \cdot 5^2 = 400.$$

Este ejercicio está resuelto en la página 297 de nuestro libro "Problemas de Matemáticas".

– – –

2. Hallar todos los polinomios del tipo $P(x) = x^2 - ax + b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, que tienen una raíz que es raíz n-ésima de la unidad.

RESOLUCIÓN

Las raíces de $P(x)$ son

$$\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Si una de ellas fuese real y raíz n-ésima de la unidad, tendría que ser 1 o -1, únicos números reales que son raíces n-ésimas de la unidad, y verificarán la ecuación $x^2 - ax + b = 0$, luego es

$$1 - a + b = 0, \quad \text{o bien,} \quad 1 + a + b = 0,$$

de donde resulta $b = a - 1$, o bien $b = -a - 1$. Por tanto, los polinomios de las formas

$$P(x) = x^2 - ax + a - 1 \quad \text{y} \quad P(x) = x^2 - ax - a - 1$$

tienen al menos una raíz real que es raíz n-ésima de la unidad. De hecho sus raíces son 1 y $a - 1$ en el primer caso y -1 y $a + 1$ en el segundo, para cualquier $a \in \mathbb{Z}$.

Como las raíces n-ésimas de $1 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0$ son de la forma

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}, \quad \text{con} \quad k = 0, 1, 2, ..., n - 1,$$

si una de ellas es raíz de $P(x)$, verificará la ecuación, es decir

$$\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}\right)^2 - a\left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}\right) + b = 0,$$

de donde

$$\cos^2 \frac{2k\pi}{n} + 2i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \cos \frac{2k\pi}{n} - \operatorname{sen}^2 \frac{2k\pi}{n} - a \cos \frac{2k\pi}{n} - ai \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} + b = 0.$$

Igualando a cero la parte real y la parte imaginaria queda

$$\begin{cases} \cos^2\dfrac{2k\pi}{n} - \operatorname{sen}^2\dfrac{2k\pi}{n} - a\cos\dfrac{2k\pi}{n} + b = 0 \\ 2\operatorname{sen}\dfrac{2k\pi}{n}\cos\dfrac{2k\pi}{n} - a\operatorname{sen}\dfrac{2k\pi}{n} = 0. \end{cases}$$

Esta segunda ecuación es

$$\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\left(2\cos\frac{2k\pi}{n} - a\right) = 0.$$

Igualando a cero el primer factor se obtiene $k = 0$ o $k = \frac{n}{2}$, supuesto que n es par, que corresponden al caso de una raíz real, ya estudiado antes.

Igualando a cero el segundo factor queda

$$2\cos\frac{2k\pi}{n} = a,$$

y como es $a \in \mathbb{Z}$, o bien es $a = 0$, con $k = \frac{n}{4}$, o bien es $\cos\frac{2k\pi}{n} = \pm 1$, o bien es $\cos\frac{2k\pi}{n} = \pm\frac{1}{2}$.

En el caso $a = 0$, de la primera ecuación resulta

$$b = a\cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{2} - \cos^2\frac{\pi}{2} = 0 + 1 - 0 = 1,$$

es decir $a = 0$, $b = 1$.

El caso del coseno igual a ± 1 corresponde de nuevo al caso real ya visto.

En el caso del coseno igual a $\pm\frac{1}{2}$, es

$$\frac{2k\pi}{n} = \pm\frac{\pi}{3} \qquad \text{o bien} \qquad \frac{2k\pi}{n} = \pm\frac{2\pi}{3}.$$

Prescindimos de los valores negativos de los ángulos porque proporcionan valores negativos de k, y con los valores $0, 1, 2, ..., n-1$ se obtienen todas las raíces n-ésimas del número complejo. La primera ecuación del sistema proporciona los valores de b, resultando:

$$\begin{aligned} \frac{2k\pi}{n} &= \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n}{6} \quad \Rightarrow \quad a = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad b = a\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}^2\frac{\pi}{3} - \cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 1, \\ \frac{2k\pi}{n} &= \frac{2\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{n}{3} \quad \Rightarrow \quad a = 2\cos\frac{2\pi}{3} = -1 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad b = a\cos\frac{2\pi}{3} + \operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{3} - \cos^2\frac{2\pi}{3} = \frac{-a}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = 1, \end{aligned}$$

luego las soluciones son

$$(a, b) = (0, 1), \quad (a, b) = (1, 1) \quad \text{y} \quad (a, b) = (-1, 1),$$

que corresponden a los polinomios

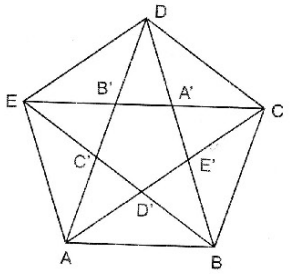
$$P(x) = x^2 + 1, \qquad P(x) = x^2 - x + 1 \qquad \text{y} \qquad P(x) = x^2 + x + 1.$$

– – –

3. Consideremos un pentágono regular. Al trazar sus diagonales se forma en su interior un nuevo pentágono regular. ¿Qué relación existe entre las áreas de los dos pentágonos?

RESOLUCIÓN

Los triángulos $\triangle EDC$ y $\triangle ED'C$ son iguales, por tener un lado común y dos ángulos iguales, y los triángulos $\triangle ED'C$ y $\triangle AD'B$ son semejantes, como puede verse en la figura



luego tenemos

$$\frac{EC}{AB} = \frac{D'C}{D'A} = \frac{D'C}{AC - D'C}.$$

Como $ED'CD$ es un paralelogramo, es $D'C = ED$, de donde

$$\frac{EC}{AB} = \frac{ED}{AC - ED}, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{d}{l} = \frac{l}{d - l},$$

o bien *"el lado del pentágono es el segmento aúreo de la diagonal"*.

De la proporción es $d^2 - dl = l^2$, resulta $d^2 - ld - l^2 = 0$ y por tanto se tiene

$$d = \frac{l + \sqrt{l^2 + 4l^2}}{2} = l\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Como es $AD' = d - l$, queda

$$\begin{aligned} D'E' &= AE' - AD' = l - (d - l) = 2l - d = \\ &= 2l - l\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = l\left(2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = l\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right), \end{aligned}$$

por lo que la razón de semejanza entre los pentágonos es $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ y la razón de semejanza de las áreas será su cuadrado, es decir

$$\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{9 + 5 - 6\sqrt{5}}{4} = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}.$$

Este ejercicio está resuelto en la página 153 de nuestro libro "Problemas de Matemáticas".

— — —

4. Dos enemigos van a participar en un duelo a pistola. Cada uno tiene una sola bala en la recámara. Si el que dispara primero acierta, su oponente muere en el acto y es incapaz de devolver el disparo. A es *rápido-en-sacar*, y tiene una probabilidad $0,6$ de disparar primero. Sin embargo no tiene buena puntería y la probabilidad de matar a su oponente es $0,4$ cuando dispare, mientras que B tiene una probabilidad $0,5$ de matar a su oponente cuando dispare. Calcular:

a) Probabilidad de que ambos sobrevivan al duelo.

b) Probabilidad de que A sobreviva.

c) Probabilidad de que A haya sacado primero, dado que ha sobrevivido.

d) Probabilidad de que el hombre que saque primero sobreviva.

RESOLUCIÓN

Consideramos los sucesos $A_D =$ "A dispara primero" y $B_D =$ "B dispara primero", cuyas probabilidades son $P(A_D) = 0,6$ y $P(B_D) = 0,4$, y los sucesos $A_M =$ "A mata", $B_M =$ "B mata", $A_S =$ "A sobrevive" y $B_S =$ "B sobrevive".

Se sabe que $P(A_M/A_D) = 0,4$ y que $P(B_M/B_D) = 0,5$, por lo que se tiene $P(\overline{A_M}/A_D) = 0,6$ y $P(\overline{B_M}/B_D) = 0,5$. Vamos a responder a las cuestiones.

a)

$$P(\textit{ambos sobreviven}) = P(\textit{el que tira falla}) = P(\overline{A_M}/A_D) \cdot P(\overline{B_M}/B_D) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3.$$

b)

$$\begin{aligned} P(A_S) &= P\left[(A_M/A_D) \cup (\overline{B_M}/B_D) \cup (\overline{A_M}/A_D \cap \overline{B_M}/B_D)\right] = \\ &= P(A_D)P(A_M/A_D) + P(B_D)P(\overline{B_M}/B_D) + P(A_D)P(\overline{A_M}/A_D)P(\overline{B_M}/B_D) = \\ &= 0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,5 = 0,24 + 0,20 + 0,18 = 0,62. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(A_D/A_S) &= \frac{P(A_D \cap A_S)}{P(A_S)} = \frac{P\left[(A_D \cap A_M) \cup (A_D \cap \overline{A_M} \cap \overline{B_M})\right]}{P(A_S)} = \\ &= \frac{P(A_D \cap A_M) + P(A_D \cap \overline{A_M} \cap \overline{B_M})}{P(A_S)} = \frac{0,6 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,5}{0,62} = \frac{0,42}{0,62} \simeq 0,68. \end{aligned}$$

d)

$$P\left[(A_M/A_D) \cup (B_M/B_D) \cup (\overline{A_M} \cap \overline{B_M})\right] =$$

$$\begin{aligned} &= P(A_D)P(A_M) + P(B_D)P(B_M) + P(\overline{A_M}/A_D)P(\overline{B_M}/B_D) = \\ &= 0,6 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,5 = 0,24 + 0,20 + 0,30 = 0,74. \end{aligned}$$

– – –

5. Discutir y resolver el sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{l} -x \quad +(1+\lambda)y+(2-\lambda)z+\lambda t=3 \\ \lambda x \qquad\quad +y+(2-\lambda)z+\lambda t=2 \\ \lambda x \qquad\quad +\lambda y+(2-\lambda)z+\lambda t=2 \\ \lambda x \qquad\quad +\lambda y+(2-\lambda)z \ -t=2 \end{array}\right.$$

RESOLUCIÓN

Como el sistema tiene cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, para aplicar el teorema de Rouché-Fröbenius calculamos el determinante de la matriz de coeficientes, que es

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1+\lambda & 2-\lambda & \lambda \\ \lambda & 1 & 2-\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 2-\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 2-\lambda & -1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$F_4-F_3, F_3-F_2, F_2-F_1$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1 & 1+\lambda & 1 & \lambda \\ \lambda+1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)^2.$$

El sistema tiene por tanto cuatro casos:

1er caso: Si es $\lambda \neq 1, \lambda \neq -1, \lambda \neq 2$, el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada es cuatro y el sistema es compatible determinado. La solución única, para cada valor del parámetro λ, se obtiene por la regla de Cramer y es

$$x = \frac{-1}{\lambda+1}, \quad y=0, \quad z = \frac{3\lambda+2}{(2-\lambda)(\lambda+1)}, \quad t=0.$$

2° caso: Si es $\lambda = 1$, los rangos de la matrices son

$$\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 = \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

ya que son iguales las filas $F_2 = F_3$. El sistema es compatible indeterminado dependiente de un parámetro. Haciendo $x = \mu$ queda

$$x=\mu, \quad y = 1+2\mu, \quad z = 1-3\mu, \quad t=0.$$

3er caso: Si es $\lambda = -1$, los rangos son

$$\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \neq \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3,$$

luego el sistema es incompatible.

4° caso: Si es $\lambda = 2$, los rangos son

$$\text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3 \neq \text{rg}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 4,$$

luego el sistema es incompatible.

– – –

6. Dada la función real de variable real $f(x) = |x-1|^{1/2} \cdot |x+1|^{3/2}$, se pide:

a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los extremos y las ramas parabólicas de $f(x)$.

b) Estudia la derivabilidad en $x_0 = -1$ y en $x_1 = 1$ de $f(x)$.

c) Dibujar su gráfica.

d) El área encerrada por la curva y el eje de abscisas.

RESOLUCIÓN

a) El dominio de definición es todo $\mathbb{R}$, es $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ y se anula en $x = \pm 1$, estos puntos son mínimos absolutos de la función. Para el estudio del crecimiento conviene redefinir la funión eliminando el valor absoluto. Queda

$$f(x) = |x-1|^{1/2} \cdot |x+1|^{1/2} \cdot |x+1| = |x^2-1|^{1/2} \cdot |x+1| = \begin{cases} (-x-1)\sqrt{x^2-1}, & \text{si } x < -1, \\ (x+1)\sqrt{1-x^2}, & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ (x+1)\sqrt{x^2-1}, & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

La función es continua en todo $\mathbb{R}$ por estar definida mediante un valor absoluto y es derivable en los intervalos $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ y $(1; +\infty)$. En los puntos de enlace hay que hacer un estudio separado. La derivada en esos intervalos, derivando cada una de las funciones, es

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x^2-x+1}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{si } x < -1, \\ \dfrac{-2x^2-x+1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ \dfrac{2x^2+x-1}{\sqrt{x^2-1}}, & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

En los intervalos primero y tercero el numerador no se anula, siendo la derivada negativa y positiva respectivamente, por lo que no hay extremos relativos. En el segundo intervalo, igualando a cero la derivada queda

$$-2x^2 - x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1, \quad x = \frac{1}{2},$$

el primero de los puntos no está dentro del intervalo, por lo que en el punto $x = 1/2$ hay un extremo relativo, que es un máximo. Por tanto, la función es creciente en $(-1; 1/2) \cup (1; +\infty)$ y decreciente en $(-\infty; -1) \cup (1/2; 1)$.

Si la función $f(x)$ tiene a la parábola $y = ax^2 + bx + c$ como rama parabólica cuando $x \to +\infty$, los coeficientes está dados por

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2}, \qquad b = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - ax^2}{x}, \qquad c = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax^2 + bx) \right].$$

Calculando estos límites se obtiene $a = 1$, $b = 1$, $c = -1/2$, por lo que la rama parabólica es $y = x^2 + x - 1/2$. De forma análoga, para $x \to -\infty$ se obtienen los mismos valores, es decir la misma parábola.

b) Para estudiar la derivabilidad en los puntos $x = \pm 1$ estudiamos las derivadas laterales mediante la definición de derivada:

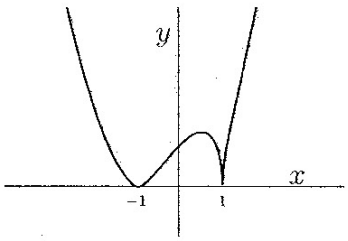
$$\begin{aligned}
f'(-1^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{(1-h-1)\sqrt{(-1+h)^2-1}-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h\sqrt{h^2-2h}}{h} = 0, \\
f'(-1^+) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{(-1+h+1)\sqrt{(-1+h)^2-1}-0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h\sqrt{h^2-2h}}{h} = 0,
\end{aligned}$$

como las derivadas laterales coinciden, la función es derivable en ese punto y la derivada vale 0. La derivada por la izquierda en el punto $x = 1$ es

$$\begin{aligned}
f'(1^-) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h+1)\sqrt{(1+h)^2-1}-0}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(h+2)\sqrt{h^2+2h}}{h} = -\infty,
\end{aligned}$$

por lo que la función no es derivable en el punto $x = 1$. De forma análoga se obtiene que $f'(1^+) = +\infty$.

c) La gráfica de la función, con los datos anteriores es



d) El área pedida es

$$A = \int_{-1}^{1} (x+1)\sqrt{1-x^2}dx = \int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x^2}dx + \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx,$$

la primera integral es nula por ser una función impar integrada en un intervalo simétrico, la segunda integral es de una función par y con el cambio $x = \operatorname{sen} t$, es $dx = \cos t dt$, resulta

$$= 0 + 2\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2} dt = 2\left[\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen} t}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

– □ –